



21 世纪高等教育系列规划教材
21STHUI GAODING JIAOYU XILIEGUHUA JIAOCAI

大学物理

COLLEGE PHYSICS

主编 范中和 王晋国

上册



西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

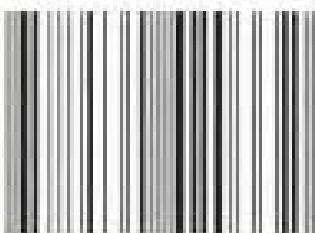
■责任编辑 / 李宝宁

■封面设计 / 王 存

大学物理

COLLEGE PHYSICS

ISBN 7-5604-2033-8



9 787560 420332 >

ISBN 7-5604-2033-8/O · 124

定价: 24.00元

21 世纪高等教育系列规划教材

大学物理

上册

主 编 范中和 王晋国
副主编 翟学军 吕 茂
张清华

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理.上册/范中和,王晋国主编. -西安:西北大学出版社,
2005.9

ISBN 7-5604-2033-8

I. 大... II. ①范... ②王... III. 物理学—高等学校—教材
IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 118570 号

书 名	大学物理 上册
主 编	范中和 王晋国
出版发行	西北大学出版社
通信地址	西安市太白北路 229 号 邮编 710069 电话 (029) 88302590
经 销	新华书店经销
印 刷	陕西向阳印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	20.75
字 数	348 千字
版 次	2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-5604-2033-8/O·124
定 价	24.00 元

大学物理是工科大学生必修的一门重要基础课。大学物理教学的宗旨,一方面为后续课程及以后的再学习打下必要的物理基础,另一方面也使学生受到良好的物理学思想和物理学方法的培养训练。

时至今日,爆炸式的知识信息增长,使知识更新的周期不断缩短。大学扩招,变原来的“精英教育”为“大众教育”,引起生源的改变。同时,各学校又不同程度地压缩了大学物理课程的学时。为了适应这种变化,我们编写出版了这套《大学物理》教材。

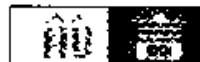
本书从新时期工科应用型人才培养的需求出发,立足于实用性、时代性、普适性。其主要特色是:

1. 取材立足于“精”和“反映现代”,用现代观念审视传统物理内容,在保证达到普通高等工科院校本科大学物理课程基本要求的基础上,加强了近代物理的分量,增加了反映物理学前沿进展的内容。

2. 在内容组织和教材结构上,从大学生的认知特点、教学规律、物理知识体系出发,强调物理知识的系统性、整体性,强调各部分知识间的相互联系。

3. 近代物理学的许多新进展是与普通物理课程的内容相关联的。在讲述近代物理知识及物理学新进展时,强调物理学新进展与经典物理或原有知识的联系。

4. 结合工科特点和现代技术发展的实际,选编了一定数量的反映新技术或联系工程实际的问题。



本书上册的主编是范中和教授、王晋国副教授,下册主编是范中和教授、徐军教授,上下册副主编是翟学军、吕茂、张清华。参加本书编写的人员有:陕西师范大学的范中和、李树华、卢永智、隋峰,长安大学的王晋国、王明祥、杨富社,西安工程科技学院的张英堂、翟学军、刘汉臣、于长丰,西安工业学院的房鸿、吕茂,第二炮兵工程学院的徐军、张清华、罗积军、师琳、侯素霞,西安石油大学的罗俊。本书编写大纲初稿由范中和教授拟订,经编写组会议讨论修改并最终确定。初稿完成后由范中和教授、徐军教授、王晋国副教授统稿。

本书在编写过程中,西北大学出版社李保宁同志给予了大力协助,在此表示诚挚的谢意。由于编者水平有限,时间仓促,书中难免有不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编者

2005年9月

绪 论

物理学是一门基础科学,它研究组成自然界物质的物理性质、相互作用及运动规律.物理学领域所涉及的(空间)尺度,从最小的粒子的半径 10^{-16} m,直到目前可探测到的最远的类星体(quasar)的距离 10^{26} m,跨越了 32 个数量级.物理学研究如此宽广范围的物理现象,发明为观测自然界所需要的更为有效的实验工具,创立使我们能够解释已经观测到的物理现象的理论.

按照物理学发展的历史过程,可将其分为经典物理学和近代物理学.近代物理学是相对于经典物理学而言的,泛指以相对论和量子论为基础从 20 世纪初开始发展起来的物理学.

一、物理学是现代技术的先导

物理学的发展为技术进步不断开辟出新的方向,导致了一系列现代高新技术的产生.信息技术、新材料技术、新光源技术、新能源技术、空间技术、分子工程技术、遗传工程技术等等的形成与发展,都在不同程度上与现代物理学息息相关.

能源的获取和利用是现代技术的基础,20 世纪物理学家的一项重大贡献就在于核能的利用.如果没有 1909 年卢瑟福的粒子散射实验,就不可能有 40 年代以后核能的利用.1905 年爱因斯坦质能关系式的提出,确立了核能利用的理论基础.物理学家 1932 年发现中子,1939 年发现在中子引起铀核裂变时可释放能量,同时有更多的中子发射,于是提出利用“链式反应”来获得原子能.40 年代,根据重核裂变能量释放的原理,建立了原子反应堆,使核裂变能的利用成为现实.50 年代,根据轻核在聚变时能量释放的原理,设计了受控核聚变反应堆.聚变能不仅丰富,而且安全清洁.可控热核聚变能的研究将成为解决 21 世纪能源问题的有效途径.

激光是 20 世纪 60 年代初出现的一门新兴技术.如果没有 1917 年爱因斯坦提出的受激辐射理论,就不可能有 1960 年第一台激光器的诞生.1917 年爱因斯坦提出了受激辐射概念,指出受激辐射产生的光子具有频率、相位、偏振态以及传播方向都相同的特点,而且受激辐射的光获得了光的放大.他又指出实现光放大的主要条件是使高能态的原子数大于低能态的原子数,形成粒子数的反转分布,从而为激光的诞生奠定了理论基础.50 年代在电气工程师和物理学家研究无线电微波段问题时

产生了量子电子学. 1958年汤斯等人提出把量子放大技术用于毫米波、红外以及可见光波段的可能性, 从而建立起激光的概念. 1960年美国梅曼研制出世界上第一台激光器. 经过40年的努力, 激光器件已发展到相当的水平, 激光成功地渗透到近代科学技术的各个领域. 利用激光高亮度、单色性好、相干性好的特点, 在材料加工、精密测量、通信、医疗、全息照相、产品检测、同位素分离、激光武器、受控热核聚变等方面都获得了广泛的应用.

电子技术是发展最快的高技术. 1947年贝尔实验室的巴丁、布拉顿和肖克莱发明了第一只晶体管, 标志着信息时代的开始. 1962年发明了集成电路, 20世纪70年代后期出现了大规模集成电路. 从1950年至1980年的30年中, 依靠物理知识的深化和工艺技术的进步, 使晶体管的图形尺寸(线宽)缩小了1000倍. 殊不知, 在此之前至少还有20年的“史前期”, 其中包括量子力学理论的建立, 费米-狄拉克统计法、能带理论、“空穴”概念等, 在物理学中为孕育晶体管的诞生做出了大量的理论和实验上的准备. 今天的超大规模集成电路芯片上, 在一根头发丝粗细的横截面积上, 可以制备40个左右的晶体管. 微电子技术的迅速发展使得信息处理能力和电子计算机容量不断增长. 40年代建成的第一台大型电子计算机, 自重达30t, 耗电200kW, 占地面积150m², 运算速度为每秒几千次, 而在今天一台笔记本电脑的性能已经超过了它. 新一代光计算机的研究和开发, 已成为21世纪国际高科技竞争的又一热点.

物理学为现代技术提供了理论依据, 当然, 反过来技术的发展与促进生产力提高的要求, 也有力地推动了物理学研究的发展. 科学技术化与技术科学化已成为一个内在的演化过程, 现代物理学与一系列高新技术的关系已密不可分.

二、物理学对社会的影响

物理学研究的规律具有很大的基本性和普遍性, 它的新概念、新理论、新思想、新方法已经广泛应用于科学技术的各个领域, 并发挥了重要作用. 物理学的一些新概念(比如场、熵等), 甚至也为社会科学所引用, 并产生了一定影响.

物理学的发展成为科学技术和社会进步的巨大推动力. 物理学的发展和技术的进步, 深刻地改变了人类的物质生产和精神生活. 1999年在亚特兰大召开的第23届国际纯粹物理与应用物理联合会(IUPAP)代表大会通过的决议《物理学对社会的重要性》指出: “物理学——研究物质、能量和它们的相互作用的学科, 是一项国际事业, 它对人类未来的进步起着关键的作用. 对物理教育的支持和研究, 在所有国家都是重要的, 这是因为:

(1)物理学是一项激动人心的智力探险活动,它鼓舞着年轻人,并扩展着我们关于大自然知识的疆界.

(2)物理学发展着未来技术进步所需要的基本知识,而技术进步将持续驱动着世界经济发动机的运转.

(3)物理学有助于技术的基本建设,它为科学进步和发明的利用,提供所需要的训练有素的人才.

(4)物理学在培养化学家、工程师、计算机科学家,以及其他物理科学和生物医学科学工作者的教育中,是一个重要组成部分.

(5)物理学扩展和提高我们对其他学科的理解,诸如地球科学、农业科学、化学、生物学、环境科学以及天文学和宇宙学,这些学科对世界上所有民族都是至关重要的.

(6)物理学提供发展应用于医学的新设备和新技术所需要的基本知识,如计算机层析术(CT)、磁共振成像、正电子发射层析术、超声波成像和激光手术等,改善了我们的生活质量.

综上所述,鉴于以上各项理由,物理学是教育体制和每个进步社会的一个重要组成部分.”

三、物理学是科学的世界观和方法论的基础

物理学理论的形成和发展,是科学的思想与科学的方法论相结合的结果.在教学中充分利用物理学科的这一特点,把培养学生的人生观、世界观融会到教学中去,对于一个大学生素质的提高往往是更有价值的东西.

物理学描绘了物质世界的一幅完整的图像,它揭示出各种运动形态的相互联系与相互转化,充分体现了世界的物质性与物质世界的统一性.19世纪中期发现的能量守恒定律,被恩格斯称为“伟大的运动基本定律”,它是19世纪自然科学的三大发现之一及唯物辩证法的自然科学基础.实验物理学家法拉第深受哲学家康德和谢林哲学思想的影响,通过大量的、内容十分广泛的实验研究,造就了他深邃的洞察力、丰富的直觉和巧妙的物理构思,他执著地寻找电与磁的统一,并试图描绘出一幅统一的物理世界图画.法拉第的一生,是在自然力统一思想指引下探索自然奥秘的一生.爱因斯坦是20世纪最著名的物理学家,在他整个的科学探索过程中,除了追求真理的精神和善于运用思维的洞察力揭示事物的本质外,还坚持了自然科学的唯物主义传统.表现在他的认识论和自然观上,他坚持以实验事实为出发点,反对从先验的概念出发.他指出牛顿的绝对时间概念之所以错误,就在于他不是以实验事实来

定义,不能被观察到.爱因斯坦和法拉第一样,都对自然界各种相互作用的统一怀有坚定的信念,并始终不渝地为证实各种现象之间的普遍联系而努力.

在物理学发展的进程中,每一个新的物理概念和物理规律的确立都是人类认识上的一次飞跃和对陈旧观念、意识的一次冲击,都是对陈旧传统观念束缚的突破.例如,普朗克突破了传统的“能量连续变化”的观念,提出“能量子”假说;爱因斯坦突破牛顿的绝对时空观的束缚,建立了相对论.正确的科学世界观的确立,对于科学或对于物理学的发展都具有重要的意义.同样,一项物理学重大的科学发现往往也直接改变着人们的世界观.

物理学是理论与实验相结合的科学.物理学中很多重大的发现,重要原理的提出和发展都体现了实验与理论的辩证关系.许多物理学的假说来源于原有理论无法解释的实验,而进一步的实验又是对假说的验证和检验.同时理论对实验又有重要的指导作用,最终成为人们对客观世界、科学规律的正确认识,形成正确的物理学理论.

物理学的新进展,改变着人们对世界的看法,对习俗、宗教、社会学、人文学也产生了重大的冲击.物理学关于宇宙的产生和发展的理论,改变着人们的宇宙观和世界观,物理学信息熵的发展直接影响着社会科学、信息学的发展.物理学对时间、空间的进一步认识,自然会改变人们最基本的认识论,在哲学领域产生最深刻的改变.

物理学理论的形成,是科学思想和科学方法相结合的结果.物理学中的方法论是多方面的,而且针对不同的物理过程也有所不同.其中主要的有:分析—综合法,归纳—演绎法,理想模型方法,理想实验方法,应用独立性原理进行分解与合成的方法,由物理学最基本的原理推导出具体物理学科的规律的方法,物理规律由假说到定律的形成方法,物理类比方法,对称性分析方法,统计方法等等.

理解和掌握物理学思想和物理学方法,不仅对我们认识和研究自然界发生的物理现象和存在于其中的物理学普遍规律,而且对物理学习以及从事物理学研究、解决实际物理问题,都是十分有益的.

四、怎样学习物理学

信息技术全面进入人们的生活,开始改变着我们所熟悉的世界.新技术和新发明的大量涌现所带来的“知识爆炸”,以及知识更新周期的不断缩短,促使人们为了生存而必须“终身学习”,以便不断更新自己的知识来适应社会的激烈变化和竞争.具备终身学习的愿望和能力远比掌握知识更重要.

物理学习,从根本上讲是一种认知过程,是学生的物理认知结构发生变化的过

程.学习成绩的高低,学习效果的优劣,在很大程度上是由学习方法决定的.因此,在物理学习过程中,掌握科学的学习方法和培养、形成科学的学习能力就具有重要的现实意义.

学习基础理论,关键在于掌握基本概念.概念是反映客观事物本质的一种抽象,是在大量观察的基础上,运用逻辑思维的方法,把一些事物本质的、共性的特征集中起来加以概括而形成的.任何一门学科,如果没有一些概念作为出发点,就不可能揭示这门学科的客观规律,也就不可能使其在实践中加以应用.

物理学是概念性很强的一门自然科学.基本概念是物理学一切逻辑系统中不可再分解的逻辑元素,对每一个基本概念都应明确:(1)问题是怎样提出来的?为什么要引入这一概念?根据哪些事实,或哪些已知的理论,是怎样进行分析、综合、概括的?(2)概念是怎样定义的?如果它是一个物理量,其量值和单位如何?此概念的物理意义是什么?其适用的条件和范围是什么?(3)这一概念与其他物理量有什么联系?用它可以说明、解释哪些现象,可以解决些什么问题?分析和解决问题的思路和方法是怎样的?

基本理论是物理学的核心内容.大学物理学中的基本理论不少是以定律、原理或定理的形式表述出来的,它反映了概念之间的联系和制约关系.基本理论有些是从观察实验中发现的,有些是从逻辑推理中得到的.对此,应做到:(1)理解基本理论所反映的物理实质,掌握基本理论的文字陈述.(2)掌握定律和定理的数学表达式.物理学的定律和定理常常有相应的数学表达式,对数学表达式,应与相应的文字陈述对照起来进行理解,并能够进行相互转译.(3)掌握基本理论适用的范围和条件.由于人类认识的局限性,加之事物本身还在不断发展,因此,任何物理定律、原理和定理都有限定的范围.不掌握这一点,就会在应用中出现错误.(4)了解基本理论在物理学中的主要应用.

作业训练是物理学习中必不可少的重要环节.做习题的目的是巩固、深化和灵活运用所学的知识,从而提高分析问题和解决问题的能力.每做一道习题都应能讲清解题的原理、依据、思路和方法.用几种不同的方法去求解同一道题目是一种行之有效的训练.每一个物理现象常常都与外界有各种不同的联系,一种解题方法就是利用这一现象与外界的某一种或几种联系.用几种不同的方法处理同一问题,可以从各个不同的侧面去认识同一物理现象,从而对物理现象的规律有比较全面和深刻的理解.做习题不要仅以标准答案为目标,力图消除“凡是题目都有现成答案”的观念.如果能在现有题目的基础上进行比较深入的研究,比如探讨题解的多种可能,质

疑题设条件的合理性、科学性，对原题目进行修正、修改、扩大等等，更有助于学生能力的提高。

在学习物理学的过程中，不少学生常常只注意书本知识本身，而忽略智力训练的要求。那么，与大学物理学课程相联系的智力训练有哪些呢？我们认为大致有以下几种：观察实验能力，抽象思维能力，逻辑推理能力，空间知觉能力，揭示数与数或符号与符号之间关系的能力，揭示习题中隐蔽的函数关系的能力，归纳能力，运算和演绎能力，应用科学技术术语进行表达的能力，创造能力等。在学习知识的过程中，有意识地提高自己这些方面的能力，不仅是大学物理课程本身的要求，也是学习其他后继课程所必须具备的。

变“被动接受”为“主动探究”，是学习理念、策略和方法的一个大变革。其宗旨是培养学生勇于探究的意识和善于创新实践的能力。

物理学理论的形成过程离不开科学的探究思想的指导和科学的探究方法的应用。系统地掌握物理学理论的同时，更应学习物理学家对未知领域孜孜不倦的探究精神和理论形成过程的科学方法。了解一个物理学定律的发现和完善的过程，比物理学的结论本身更为重要，因为正是这样的过程充满了探究、发现、揭示、归纳、总结的思想和方法。这对于一个大学生逐渐形成实事求是的科学态度、敢于创新的探索精神和科学的探究能力，往往是更有价值的东西。

在学习过程中要敢于发现问题、提出问题。爱因斯坦曾说：“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决一个问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已，而提出新的问题，新的可能性，从新的角度去看问题，都需要有创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步。”他还说：“发展独立思考和独立判断的一般能力，应当始终放在首位。如果一个人掌握了学科的基础理论，并且学会了独立思考和工作，他必定会找到自己的道路，而且比起那种主要以获得细节知识为其培训内容的人来，他一定会更好地适应进步和变化。”这段话，一方面说明了知识与能力的密切联系，同时更强调了能力的重要性。

同学们，青年是科学新发现的主力，不要迷信权威，应该像牛顿那样，努力“站在巨人的肩上”，让青春发出光辉。

目 录

绪论	/1
第 1 章 质点运动学	/1
§ 1.1 参考系 质点	/1
§ 1.2 质点运动的描述	/2
§ 1.3 质点运动学的两类问题	/9
§ 1.4 圆周运动	/14
§ 1.5 相对运动	/18
思考题	/21
习题	/22
第 2 章 牛顿定律及其内在随机性	/26
§ 2.1 牛顿定律及其应用	/26
§ 2.2 物理量的单位和量纲	/37
§ 2.3 惯性系与非惯性系	/40
§ 2.4 混沌与牛顿定律的内在随机性	/46
§ 2.5 混沌的演化途径及混沌现象的本质	/51
思考题	/56
习题	/58
第 3 章 动量守恒定律和机械能守恒定律	/60
§ 3.1 质点的动量定理	/60
§ 3.2 动量守恒定律	/64
§ 3.3 动能定理	/69
§ 3.4 势能	/72

§ 3.5	机械能守恒定律	/80
§ 3.6	碰撞	/84
	思考题	/86
	习题	/88
第 4 章	刚体的转动	/92
§ 4.1	刚体的定轴转动	/92
§ 4.2	转动定律	/97
§ 4.3	定轴转动中的功能关系	/105
§ 4.4	角动量守恒定律	/109
§ 4.5	进动	/118
	思考题	/120
	习题	/121
第 5 章	机械振动	/126
§ 5.1	简谐振动	/126
§ 5.2	简谐振动的能量	/133
§ 5.3	简谐振动的旋转矢量表示法	/136
§ 5.4	简谐振动的合成	/138
§ 5.5	阻尼振动	/145
§ 5.6	受迫振动 共振	/147
	思考题	/151
	习题	/152

目 录

第 6 章 机械波	/156
§ 6.1 机械波的产生和传播	/156
§ 6.2 平面简谐波的波函数	/160
§ 6.3 波的能量	/166
§ 6.4 惠更斯原理	/171
§ 6.5 波的干涉	/174
§ 6.6 驻波	/178
§ 6.7 声波	/185
§ 6.8 多普勒效应	/187
思考题	/192
习题	/193
第 7 章 气体动理论	/196
§ 7.1 气体分子热运动的规律	/196
§ 7.2 平衡态及理想气体的状态方程	/198
§ 7.3 理想气体的压强和温度的统计意义	/201
§ 7.4 麦克斯韦速率分布律	/205
§ 7.5 玻耳兹曼分布律	/212
§ 7.6 能量均分定理	/214
§ 7.7 气体分子的平均碰撞频率和平均自由程	/218
思考题	/221
习题	/222

第 8 章 热力学第一定律及其应用	/227
§ 8.1 热力学第一定律	/227
§ 8.2 理想气体的等值过程	/232
§ 8.3 绝热过程	/236
§ 8.4 循环过程	/243
思考题	/250
习题	/251
第 9 章 不可逆过程与熵	/256
§ 9.1 热力学第二定律与时间箭头	/256
§ 9.2 熵概念的引入	/263
§ 9.3 熵增加原理	/272
§ 9.4 熵与热力学概率	/279
§ 9.5 熵与信息	/285
思考题	/292
习题	/294
附录 1 矢量	/297
附录 2 物理学常量	/306
习题答案	/308

第 1 章 质点运动学

自然界中,物质的运动形式是多种多样的,最简单而又最基本的运动是物体之间相对位置的变化,这种运动称为机械运动.江河湖海的奔流,宇宙飞船的航行,机器的运转等,都是机械运动.力学就是研究机械运动规律的科学.力学通常分为运动学和动力学两部分.运动学描述运动物体的位置随着时间的移动而发生的变化,动力学解释物体为什么运动.本章讨论运动学,即对质点的运动位置、运动快慢、运动方向以及它们随时间的变化作出描述,下一章讨论动力学.

§ 1.1 参考系 质点

一、参考系

日常生活中,当我们说某一物体是运动还是静止的时候实际上都隐含一个作为参考的物体,即地面,我们说物体处于运动状态以及运动的快慢和运动的方向实际上都是相对于地面来说的.这一事实说明,我们描述物体的运动必须选择一个参考物体,描述的结果都是相对于该物体的,脱离参考物体说物体是运动还是静止是没有任何意义的.

物理学中,我们把为描述物体的运动而选择作为参考的物体称为参考系.

描述物体运动的时候,必须选择一个参考系,并以参考系为标准,也就是将参考系当作“静止”的,来研究物体相对于参考系的运动.这样,对物体运动描述的结果都是相对于该参考系的结果,不指明参考系来描述物体的运动是没有任何意义的.运动学中参考系的选择是任意的,即对同一个物体,我们可以在不同的参考系中进行描述.一般来讲,不同的参考系对同一物体的运动的描述结果是不一样的.例如,描述月球的运动可以选择地球作为参考系,此时,月球的运动轨迹为一椭圆;此外,也可以选择太阳作为参考系,由于地球绕太阳的运动,此时,月球的运动轨迹不再是一椭圆.可以看到,说物体运动或静止以及物体是如何运动的都是相对于某一参考系的.

从数量上确定物体相对于参考系的位置,需要在参考系上选用一个固定的坐标系.最常用的坐标系是直角坐标系,根据需要也可以选择其他坐标系,比如极坐标系,球坐标系等.

二、质点

有了参考系和坐标系,就可以对物体的运动进行定量描述.但是,自然界中的实际物体,总是具有大小和形状,甚至大小和形状可能会产生变化,它们的运动表现出相当的复杂性,各部分的运动也会不一样,对它们的运动进行描述是相当困难的.在很多情况下,物体的大小和形状对物体的运动产生的影响很小,甚至可以忽略.此时我们就可以把物体的大小和形状忽略,将其简化为一个几何点,称为质点.此时,只需要描述一个点的运动,使问题得到极大的简化.

例如,研究月球绕地球的运动,由于月球本身的半径比月球到地球的距离小的多,月球的大小和形状并不起主要作用,这时月球的大小和形状可以忽略,可以把月球看成一个质点.

质点是一个理想化的物理模型,在自然界中并不存在.引入理想模型是物理学中的一种常用方法,原因在于自然界中所发生的各种现象都很复杂,各种因素很多,描述和研究这样的现象异常困难,因此我们通常将一些次要的因素去掉,保留主要的因素,建立一个模型,即理想模型.在理想模型中,由于只保留对这种现象起决定作用的因素,因此物理模型更能够反映现象的本质,同时又可以使问题得到简化.运动学中,引入质点,由于忽略物体的大小和形状,把物体看成一个几何点,描述一个点的运动容易得多,另一方面,对质点运动的描述也是描述复杂物体运动的基础.

§ 1.2 质点运动的描述

描述质点的运动,就是要描述质点的空间位置随时间变化的各种情况.通常用位置矢量、位移、速度、加速度等物理量来描述质点的运动.

一、位置矢量 运动方程 位移

1. 位置矢量

运动学中,为了描述质点的位置,需在参考系中固定一坐标系.下面以直角坐标

系为例作一说明。

建立如图 1.1 的直角坐标系 ($Oxyz$), 在参考系上选取一个固定点 O 为坐标系原点, 则某一时刻, 质点在空间中的 P 点, 其坐标为 (x, y, z) . 由于质点在空间中的位置和坐标之间存在一一对应关系, 即给出坐标后, 就惟一确定了质点的位置, 因此可以用坐标描述某一时刻质点在空间的位置, 该坐标称作质点的位置坐标.

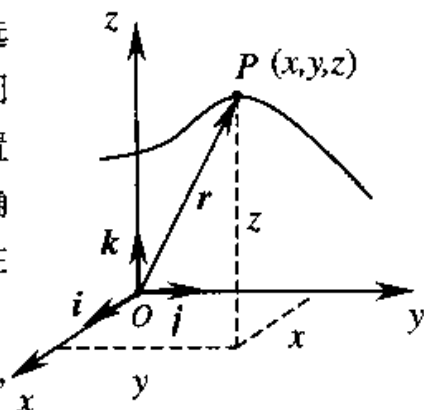


图 1.1

描述质点的位置也可以采用矢量法. 如图 1.1 所示, 作一由坐标系原点 O 指向 P 点的矢量 $r = \overrightarrow{OP}$, 该矢量与 P 点存在一一对应的关系, 因此, 矢量也可以描述质点在空间的位置, 该矢量称为位置矢量.

位置矢量的正交分解式为

$$r = xi + yj + zk \quad (1-1)$$

式中, i, j, k 为沿三个坐标轴方向的单位矢量, 即它们的方向沿各自坐标轴正向, 长度为单位长度, x, y, z 即前述直角坐标系中的位置坐标, 可理解为位置矢量沿三个坐标轴的分量.

位置矢量的大小等于质点距坐标系原点 O 点的距离, 为

$$r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位置矢量 r 的方向可以用它的方向余弦表示, 为

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r},$$

三个方向余弦之间有如下关系

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

位置矢量的单位与长度的单位相同, 在国际单位制 (SI) 中, 其单位为米 (m).

2. 运动方程

质点总是在空间中运动, 其位置随时间而变化, 即位置矢量 r 为时间 t 的函数, 表示为

$$r = r(t) \quad (1-2)$$

此式是最基本的运动学关系式, 称为运动方程, 知道运动方程, 可以确定质点在任一时刻的位置. 运动方程 (1-2) 式的正交分解式为

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad (1-3)$$

在直角坐标系中运动方程也可表述为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

此式又可以看成质点运动轨迹的参数方程,从中消去时间 t , 可得一曲线方程, 即质点运动的轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$

3. 位移

由于质点的位置随时间不断变化,从某一时刻开始,经过一段时间后,质点的位置发生了变化.运动学中需要描述质点在一段时间内位置的变动情况.

设一质点在空间中运动,其位置随时间不断变化,如图 1.2 所示. t_1 时刻,质点位于 P 点,位置矢量为 r_1 , t_2 时刻,质点位于 Q 点,位置矢量为 r_2 ,以 P 点为起点, Q 点为终点作一矢量 Δr , 则

$$\Delta r = r_2 - r_1 \quad (1-4)$$

这一矢量 Δr 称为 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内质点的位移. 位移为位置矢量的增量.

位移为一矢量,大小反映在 Δt 时间内质点的运动距离,方向反映在 Δt 时间内质点的总体运动方向.

在直角坐标系中,由于

$$r_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$

$$r_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

故位移表达式为

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_2 - r_1 \\ &= (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j + (z_2 - z_1) k \\ &= \Delta x i + \Delta y j + \Delta z k \end{aligned}$$

此式表明位移由位置坐标的增量决定,其大小为

$$\Delta r = |\Delta r| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

即为在 Δt 时间内质点的运动距离.

位移的单位也是 m.

需要指出的是,位移的大小 $|\Delta r|$ 仅由 Δt 时间间隔内质点的始末位置间的直线

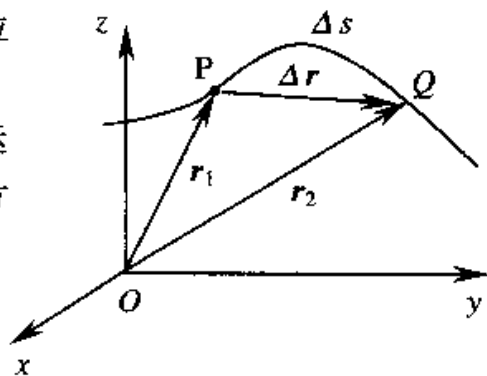


图 1.2

距离决定,与质点实际经历的路径 Δs 无关.一般来说, $|\Delta r| \neq \Delta r$,因为 $\Delta r = |\Delta r_2| - |\Delta r_1|$ 是位置矢量在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内的增量. Δs 叫做路程,为一段时间内质点经过的轨迹的总长度,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|dr| \approx ds$.

二、速度

质点的运动有快慢和方向的不同,刻划质点快慢程度和方向的物理量是平均速度和瞬时速度.

质点运动的快慢与位移和时间有关.定义质点的位移 $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$ 与发生这一位移的时间间隔 Δt 之比为质点在这段时间内的平均速度,记作 \bar{v} ,即

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} \quad (1-5)$$

如图 1.3 所示, t 时刻,质点位于 P 点,经过 Δt 时间后, $t+\Delta t$ 时刻,质点位于 Q 点,在 Δt 时间内,质点的位移为 Δr .

平均速度反映在 Δt 时间内质点的平均运动快慢和总的运动方向,不反映每一时点的瞬时快慢和方向.

设 t 时刻,质点位于 P 点,要描述该时刻质点的运动情况,可以用 t 时刻附近 Δt 时间范围的平均运动情况进行近似,即用 Δt 时间内的平均速度近似 t 时刻瞬时速度,明显地, Δt 越小,这种近似越准确.当 Δt 趋于 0 时,平均速度趋于 t 时刻瞬时速度,换句话说,平均速度的极限即为该时刻质点的瞬时运动速度,用 v 表示瞬时速度,即有

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr(t)}{dt} \quad (1-6a)$$

瞬时速度描述的是质点在某一时刻的运动快慢和运动方向,为该时刻位置矢量对时间的变化率或一阶导数.瞬时速度简称速度.

从图 1.3 可以看出,当 Δt 趋于 0 时, Q 点位置无限逼近 P 点, Δr 方向趋向于 P 点沿运动轨迹的切线方向,由于速度矢量 v 的方向与 Δr 方向相同,故瞬时速度的方向亦为该点切线方向.

直角坐标系中,速度表示为

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}i + \frac{dy(t)}{dt}j + \frac{dz(t)}{dt}k \\ &= v_x i + v_y j + v_z k \end{aligned} \quad (1-6b)$$

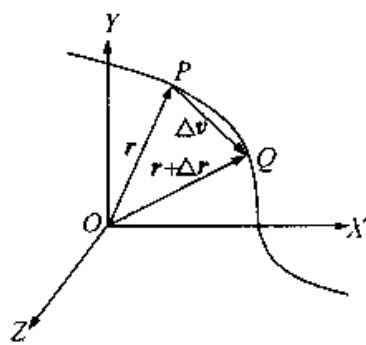


图 1.3

式中

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt},$$

为速度沿三个坐标轴的分量.

速度的大小称为速率,用 v 表示,

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

因为当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|d\boldsymbol{r}| = ds$, 因此有

$$v = \frac{ds}{dt}$$

也就是说,速率等于质点所经过的路程对时间的变化率.

应当注意速度与速率的区别,速度是矢量,它不仅表明质点运动的快慢,而且还反映质点运动的方向,速率是标量,它仅表明质点运动的快慢.

速度和速率的单位都是米/秒 ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

三、加速度

质点在运动过程中,瞬时速度的大小和方向都可能变化,运动学中,用加速度矢量描述速度的变化.

如图 1.4 所示,设 t 时刻,质点位于 P 点,速度为 $\boldsymbol{v}(t)$, 经过 Δt 时间后, $t + \Delta t$ 时刻,质点位于 Q 点,速度为 $\boldsymbol{v}(t + \Delta t)$, 在 Δt 时间内,质点速度的增量为 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$, 速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 与发生这一增量所用时间 Δt 之比 $\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 称为这段时间内的平均加速度,记为 $\bar{\boldsymbol{a}}$,

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \quad (1-7)$$

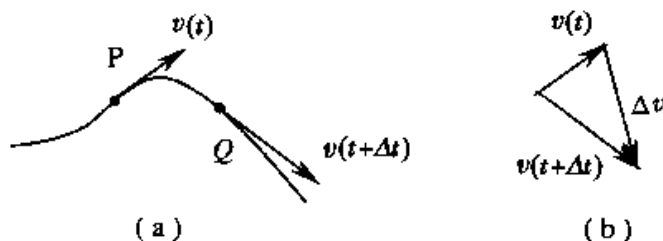


图 1.4

平均加速度与一定时间间隔相对应,其大小反映 Δt 时间内速度的平均变化,其方向沿速度增量的方向.

t 时刻速度的瞬时变化可以用 Δt 时间内质点的平均加速度近似, 很明显, Δt 越小, 这种近似越准确. 当 Δt 趋于 0 时, 平均加速度的极限称为 t 时刻质点的瞬时加速度, 即

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (1-8)$$

即质点的瞬时加速度等于速度矢量对时间的变化率或一阶导数, 因

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

故有

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (1-9)$$

即瞬时加速度等于位置矢量对时间的二阶导数. 瞬时加速度简称为加速度.

直角坐标系中, 加速度表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k})}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \boldsymbol{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \boldsymbol{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \boldsymbol{k} \\ &= a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \end{aligned} \quad (1-10)$$

式中

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}.$$

为加速度沿三个坐标轴的分量, 加速度的大小为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

加速度的方向余弦为

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_a = \frac{a_z}{a}.$$

加速度的(SI)单位是米/秒² ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

必须明确, 加速度也是矢量, 由于它是速度对时间的变化率, 因此, 无论速度的大小发生变化, 还是速度的方向发生变化, 都有加速度产生.

例 1-1 已知某质点的运动函数为 $x = -3t^2 + 5t + 10$, $y = 2t^2 - 8t + 20$. 求:

- (1) $t = 2\text{s}$ 时的位置矢量;
- (2) 第二秒末到第三秒末的位移;
- (3) 任意时刻的速度和加速度.

解 (1) $x(2) = -3 \times 2^2 + 5 \times 2 + 10 = 8$

$$y(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 20 = 12$$

所以

$$r(2) = 8i + 12j$$

$$(2) \quad x(3) = -2, y(3) = 14, x(3) - x(2) = -10, y(3) - y(2) = 2$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta r &= r(3) - r(2) \\ &= [x(3) - x(2)]i + [y(3) - y(2)]j \\ &= -10i + 2j \end{aligned}$$

$$(3) \quad v_x = \frac{dx}{dt} = -6t + 5, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 4t - 8$$

所以

$$v = (-6t + 5)i + (4t - 8)j$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -6, a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4$$

所以

$$a = -6i + 4j$$

例 1-2 已知一质点在 Oxy 平面内运动, 其运动方程为

$$r = 2t i + (19 - 2t^2)j$$

式中 x, y 以 m 计, t 以 s 计, 试求:

- (1) 质点的轨迹方程;
- (2) $t = 1s$ 和 $t = 2s$ 时的位置矢量以及这一秒内质点的位移;
- (3) $t = 1s$ 时质点的速度和加速度;
- (4) 何时质点的位置矢量与速度矢量恰好垂直?
- (5) 何时质点离原点最近? 算出这一距离.

解 (1) 由已知方程有

$$x = 2t, \quad y = 19 - 2t^2$$

两式联立消去 t 即得轨迹方程

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2 \quad (x \geq 0)$$

(2) $t = 1s$ 和 $t = 2s$ 时的位置矢量分别为

$$r_1 = 2i + 17j(\text{m})$$

$$r_2 = 4i + 11j(\text{m})$$

这一秒内质点的位移为

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_2 - r_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j \\ &= (4 - 2)i + (11 - 17)j = 2i - 6j(\text{m}) \end{aligned}$$

(3) 质点的速度表示式为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

$t = 1\text{s}$ 时有

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

质点的加速度表示式为

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -4\boldsymbol{j} (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

\boldsymbol{a} 为常矢量, 与 t 无关.

(4) 当 $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ 时, 有 $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$, 即由

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = xv_x + yv_y = 2t \times 2 + (19 - 2t^2)(-4t) = 0,$$

得 $t = 0, \pm 3$ (负值舍去) 即 $t = 0$ 和 $t = 3\text{s}$ 时, 位置矢量恰与速度垂直;

(5) t 时刻, 质点到原点的距离为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (19 - 2t^2)^2}$$

令
$$\frac{dr}{dt} = 0$$

得
$$8t(1 - 19 + 2t^2) = 0$$

解得 $t = 0, \pm 3$ (负值舍去)

$$t = 0 \text{ 时, } r_0 = \sqrt{19^2} = 19(\text{m})$$

$$t = 3\text{s} \text{ 时, } r_3 = \sqrt{(2 \times 3)^2 + (19 - 2 \times 3^2)^2} \approx 6.08(\text{m}) < r_0$$

因此, 当 $t = 3$ 秒时, 质点的位置距原点最近, 等于 6.08m .

§ 1.3 质点运动学的两类问题

质点运动学的第一类问题是已知质点的运动方程, 求质点在任意时刻的速度和加速度. 由上节知, 对运动方程求导数可得速度, 对速度求导数可得加速度.

质点运动学的第二类问题是已知速度和加速度及初始条件, 求质点的运动方程. 所谓初始条件, 是指初始时刻质点的位置 \boldsymbol{r}_0 和速度 \boldsymbol{v}_0 . 本节将证明, 对加速度求积分可得速度, 对速度求积分可得运动方程.

设加速度 \boldsymbol{a} 已知, 则由 $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, 等式两边同乘以 dt , 就有

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$$

设 $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$, 任意时刻 t 的速度为 \mathbf{v} , 对上式两边分别积分

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}dt \quad (1-11)$$

得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}dt \quad (1-12)$$

由 $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = (v_{0x} + \int_0^t a_x dt)\mathbf{i} + (v_{0y} + \int_0^t a_y dt)\mathbf{j} + (v_{0z} + \int_0^t a_z dt)\mathbf{k}$

得(1-12)式在直角坐标系中的各分量式为

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt, \quad v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y dt, \quad v_z = v_{0z} + \int_0^t a_z dt. \quad (1-13)$$

若 \mathbf{a} 的大小和方向都不变, 即物体作匀变速运动, (1-12)式变为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (1-14)$$

(1-14)式在直角坐标系中的分量式为

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad v_y = v_{0y} + a_y t, \quad v_z = v_{0z} + a_z t \quad (1-15)$$

由 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, 等式两边同乘 dt , 就有

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$$

设 $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0$, 任意时刻 t 的运动函数为 $\mathbf{r}(t)$, 则

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}dt$$

有 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}dt)dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t (\int_0^t \mathbf{a}dt)dt \quad (1-16)$

(1-16)式在直角坐标系中的分量式为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \int_0^t (\int_0^t a_x dt)dt \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \int_0^t (\int_0^t a_y dt)dt \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \int_0^t (\int_0^t a_z dt)dt \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

在(1-16)式中, 若 \mathbf{a} 为常矢量, 则(1-16)式改写为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad (1-18)$$

(1-17) 式改写为

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2, \quad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2. \quad (1-19)$$

式(1-12)~(1-19)中, r_0, v_0 分别为 $t=0$ 时刻质点的位置矢量和速度矢量, 称为初始条件. 显然, 给定初始条件和加速度关于 t 的函数, 我们就可以确定质点任意时刻的速度和位置.

若 $a = a(x, y, z)$, 为简单起见, 设 $a = a_x(x)i + a_y(y)j + a_z(z)k$, 利用分离变量, 分别积分的方式, 就可以给出速度与坐标、坐标与时间的关系, 如 $a_x(x) = \frac{dv_x}{dt}$, 等式两边同乘 dx , 则 $a_x(x)dx = \frac{dv_x}{dt}dx = v_x dv_x$, 等式两边分别对各自变量积分

$$\int_{x_0}^x a_x(x)dx = \int_{v_{0x}}^{v_x} v_x dv_x = \frac{1}{2}(v_x^2 - v_{0x}^2) \quad (1-20)$$

在(1-20)中, 若 $a_x(x) = a_x = \text{常量}$, 则

$$2a_x(x - x_0) = v_x^2 - v_{0x}^2 \quad (1-21)$$

如果(1-15), (1-19), (1-21)式中 y, z 分量为 0, 只有 x 分量, 则正是我们在中学时所熟悉的匀加速直线运动关系式. 若其中的加速度 a 为 0, 则为匀速直线运动方程式.

例 1-3 设跳伞运动员从高空跳下后, 相对地球的加速度为 $a_z = g - kv_z$, 以地球为参考系, 取跳伞点为坐标原点, 指向地球为 z 正方向, 求 $v_z(t), z(t)$ 表达式.

解 由 $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ 得

$$dv_z = a_z dt = (g - kv_z) dt$$

分离变量

$$\frac{dv_z}{g - kv_z} = dt, \quad \int_0^{v_z} \frac{dv_z}{g - kv_z} = \int_0^t dt$$

$$\int_0^{v_z} \frac{d(-kv_z)}{g - kv_z} = \int_0^t -k dt$$

$$\ln(g - kv_z) \Big|_0^{v_z} = -kt$$

所以

$$v_z = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

由 $\frac{dz}{dt} = v_z$, 得 $dz = v_z dt = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) dt$, $\int_0^z dz = \int_0^t \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) dt$

$$z = \frac{g}{k} \int_0^t (1 - e^{-kt}) dt = \frac{g}{k} \left[t + \frac{1}{k} (e^{-kt} - 1) \right]$$

例 1-4 质点过 $(1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{B})$ 点时为计时起点, 过该点时 $\boldsymbol{v}_0 = A(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ (m/s), 且过该点时开始具有 $\boldsymbol{a} = B(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$ 的加速度, 求质点任意时刻的速度、运动函数(为计算方便, 取 $A = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, B 为常数, 单位为 s^{-2}).

解 $a_x = \frac{dv_x}{dt} = Bx$, 两边同乘以 dx , 有 $v_x dv_x = Bx dx$

等式两边分别积分

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} v_x dv_x = \int_{x_0}^x Bx dx$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = B(x^2 - x_0^2), \quad v_x^2 = v_{0x}^2 + B(x^2 - x_0^2)$$

代入 $x_0 = 1/\sqrt{B}$, $v_{0x} = 1$, 得 $v_x = \sqrt{B}x$, 同理 $v_y = \sqrt{B}y$, $v_z = \sqrt{B}z$

所以 $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} = \sqrt{B}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

由 $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{B}x$, 两边同乘 dt , 得 $dx = \sqrt{B}x dt$, 分离变量得 $\frac{dx}{x} = \sqrt{B} dt$

等式两边分别积分 $\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \sqrt{B} dt$, $\ln \frac{x}{x_0} = \sqrt{B} t$

则 $x = x_0 e^{\sqrt{B}t} = e^{\sqrt{B}t} / \sqrt{B}$ (m)

同理 $y = y_0 e^{\sqrt{B}t} = e^{\sqrt{B}t} / \sqrt{B}$ (m)

$z = z_0 e^{\sqrt{B}t} = e^{\sqrt{B}t} / \sqrt{B}$ (m)

所以 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = e^{\sqrt{B}t}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) / \sqrt{B}$ (m)

例 1-5 有一学生在体育馆阳台上以投射角 $\theta = 30^\circ$ 和速率 $v_0 = 20 \text{ m/s}$ 向前操场投出一垒球. 球离开手时距离操场水平面的高度 $h = 10 \text{ m}$, 试问球投出后何时着地? 在何处着地? 着地时的速度如何?

解 这是一个大家熟悉的斜抛运动, 以阳台上方学生出手处为坐标原点 O , 建立 xOy 坐标系如图 1.5, 已知

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0 \cos\theta \boldsymbol{i} + v_0 \sin\theta \boldsymbol{j}$$

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

质点为匀加速运动. 由式(1-7), 有

$$v_x = v_{0x} + a_x t = v_0 \cos\theta$$

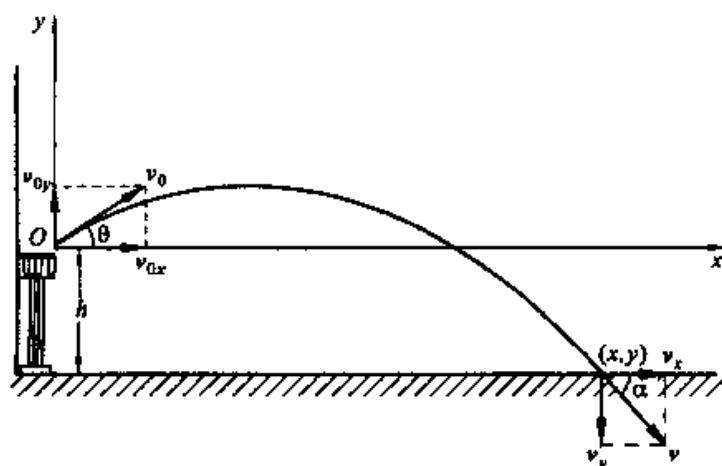


图 1.5

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \theta - gt$$

由(1-3)式,有

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = v_0 \cos \theta t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

落地时, $y = -h = -10\text{m}$, 代入 y 表达式, 解出 $t = 2.78\text{s}$ 和 -0.74s (舍去).

落地时 x 为

$$\begin{aligned} x|_{t=2.78} &= v_0 \cos \theta \cdot 2.78 \\ &= 20 \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2.78 = 48.1\text{m} \end{aligned}$$

落地时位矢为

$$\boldsymbol{r} = 48.1\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} \text{ m}$$

落地时速度分量为

$$\begin{cases} v_x = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 17.3\text{m/s} \\ v_y|_{t=2.78} = 20 \times \frac{1}{2} - 9.8 \times 2.78 = -17.2\text{m/s} \end{cases}$$

所以

$$\boldsymbol{v} = 17.3\boldsymbol{i} - 17.2\boldsymbol{j}$$

§ 1.4 圆周运动

上一节研究的运动是具有普遍意义的,在这个基础上对一些特殊的运动进行研究,得到适合它们的更简单、明确的表达式,也是很有必要的.圆周运动是曲线运动的特例,通过研究圆周运动,可以通过曲率圆概念给出一般曲线运动与其轨迹相联系的表达式;物体绕定轴转动时,物体中每一质点都作圆周运动,故圆周运动还是研究物体转动的基础.

一、匀速率圆周运动

质点作圆周运动时,若任意相对时间间隔内,质点走过相等长度的圆弧,就称质点作匀速率圆周运动.设圆周半径为 R ,圆心为 O ,在时间 Δt 内,质点从 A 点运动到 B 点,在 A, B 两点处的速度分别为 \boldsymbol{v}_A 和 \boldsymbol{v}_B ,则速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$.

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A}{\Delta t}$$

其大小和方向可由几何关系推证如下.

考虑到 $\triangle OAB$ 和 $\triangle O'A'B'$ 是相似三角形,有比例关系 $\frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{v} = \frac{\Delta l}{R}$,所以

$$|\boldsymbol{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 点趋近于 A 点, $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向垂直于 \boldsymbol{v}_A ,这就是说 \boldsymbol{a} 的大小为 $\frac{v^2}{R}$,方向指向圆心 O ,这就是在中学课本中已讲到的向心加速度.这里速度大小并未改变,说明加速度对应于速度方向改变.

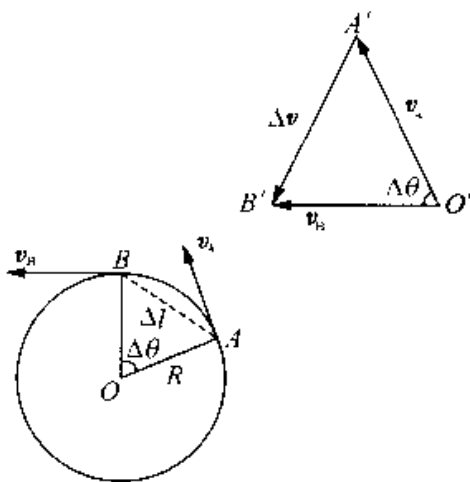


图 1.6

二、变速率圆周运动

质点在圆周上各处的速率随时间变化,称为变速率圆周运动.

以 O' 为圆心,以 $|\boldsymbol{v}_A|$ 为半径,画弧交 \boldsymbol{v}_B 上 A'' ,则

$$|\mathbf{v}_A| = \overline{OA''}$$

令 $|\Delta \mathbf{v}_\tau| = \overline{A''B'}$, 则

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_\tau$$

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}_n|}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}_\tau|}{\Delta t}$$

由前面讨论已知

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}_n|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad (1-22)$$

表示与速度方向改变相应的加速度. 而 $|\Delta \mathbf{v}_\tau| = |\mathbf{v}_B| - |\mathbf{v}_A| = \Delta v$, 即 $|\Delta \mathbf{v}_\tau|$ 是质点由 A 到 B 速度大小的增量, 故

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}_\tau|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \text{ 当 } \Delta t \rightarrow 0 \text{ 时, } \mathbf{v}_B \text{ 趋于与 } \mathbf{v}_A \text{ 重合,}$$

即 $\Delta \mathbf{v}_\tau$ 的极限方向就是 \mathbf{v}_A 的方向, 这就是说在极限情况下, $\Delta \mathbf{v}_\tau$ 与 $\Delta \mathbf{v}_n$ 垂直. 取 \mathbf{n} 、 $\boldsymbol{\tau}$ 分别为圆周法线方向(指向 O 点)和切线方向的单位矢量, 则

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau = a_n \mathbf{n} + a_\tau \boldsymbol{\tau} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n} + \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} \quad (1-23)$$

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

对于一般曲线运动, 质点在曲线上 A、B 两点的速度分别为 \mathbf{v}_A 和 \mathbf{v}_B , $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$. 也可以分解为 $\Delta \mathbf{v}_n$ 和 $\Delta \mathbf{v}_\tau$, 则质点在任一时刻的加速度

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} + \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}$$

式中 ρ 为该处曲线的曲率半径.

三、圆周运动的角量描述

如图, 取 Ox 轴为参考方向, 质点与 O 点的连线与 Ox 轴之间有一夹角, 此夹角称为质点的角位置, 以 θ 表示, 规定以逆时针旋转为正方向, 则角位置 θ 是时间 t 的函数, 即 $\theta = \theta(t)$. 设 t 时刻和 $t + \Delta t$ 时刻质点分别过 A 点和 B 点. 质点在 Δt 时间内相对 O 点的角位移为 $\Delta\theta$. 定义角速度为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-24)$$

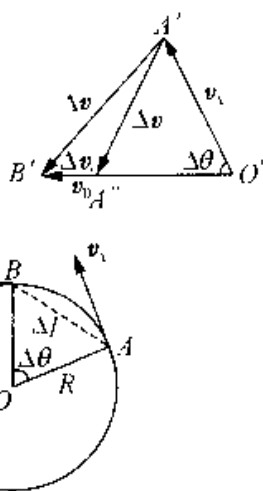


图 1.7

设质点在 A 处, $\omega_A = \omega(t)$, 在 B 处, $\omega_B = \omega(t + \Delta t)$, 定义角加速度为

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega_B - \omega_A}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (1-25)$$

ω 的单位为: 弧度 / 秒 ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$), β 的单位为: 弧度 / 秒² ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$).

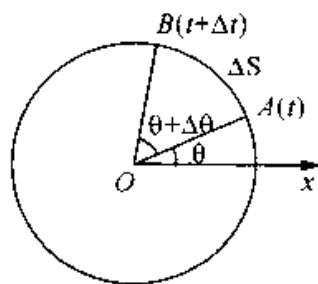


图 1.8

下面导出用角量表达的运动函数.

$$\text{由 } \beta = \frac{d\omega}{dt}, \text{ 有 } d\omega = \beta dt, \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \beta dt$$

$$\text{由 } \omega = \frac{d\theta}{dt}, \text{ 有 } d\theta = \omega dt, \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \int_0^t \beta dt) dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \int_0^t \left(\int_0^t \beta dt \right) dt$$

$$\text{若 } \beta \text{ 为 } \theta \text{ 的函数, 即 } \beta = \beta(\theta), \text{ 则 } d\omega = \beta dt \cdot \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{\beta d\theta}{\omega}$$

$$\omega d\omega = \beta d\theta, \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \beta d\theta, \omega^2 - \omega_0^2 = 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \beta d\theta$$

若 β 为常量, 由上面讨论得到匀变速圆周运动关系

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \quad (1-26)$$

这些关系式与匀变速直线运动函数形式完全相同.

对应于角量 $\Delta\theta, \omega, \beta$, 我们把 $\Delta S, v, a_t, a_n$ 称为线量. 角量与线量之间有如下的关系:

由 $\Delta S = R\Delta\theta$, 有

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

这组关系在研究物体转动时常常用到.

例 1-6 一质点沿半径为 0.10m 的圆周运动, 其角位置可表示为 $\theta = 2 + 4t^3$, 式中 θ 以 rad 计, t 以 s 计. 试求: (1) $t = 2\text{s}$ 时质点的法向加速度和切向加速度; (2) 当切向加速度的大小恰为总加速度大小一半时的 θ 值.

解 依题意, 质点的运动方程为 $\theta = 2 + 4t^3$, t 时刻质点的速率、切向加速度和

法向加速度可分别求出.

$$v = R\omega = R \frac{d\theta}{dt} = 12Rt^2$$

$$a_r = \frac{dv}{dt} = 24Rt$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = (12)^2 R t^4$$

(1) $t = 2\text{s}$ 时

$$a_r = 24 \times 0.10 \times 2 = 4.8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$a_n = (12)^2 \times 0.10 \times 2^4 = 230.4 (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

(2) 依题意 $a = 2a_r = \sqrt{a_n^2 + a_r^2}$

得
$$a_n = \sqrt{3}a_r$$

即
$$(12)^2 R t^4 = \sqrt{3} \times 24Rt$$

$$t = (12)^{\frac{1}{3}} = 0.66 (\text{s}) \quad (\text{不合题意的解已舍去})$$

将 t 值代入运动方程得

$$\theta = 2 + 4 \times (12)^{\frac{1}{3}} = 3.2 (\text{rad})$$

例 1-7 如图 1.9 所示, 质点沿圆心 O , 半径为 R 的圆周运动, 设 P 点为计时、计程(自然坐标)起点, 运动函数为 $S = v_0 t - \frac{b t^2}{2}$, 其中 v_0, b 为正常数, 求:

- (1) 任意时刻 t 的速率和加速度;
- (2) t 为何值时加速度的大小等于 b ?
- (3) 加速度达到 b 时, 质点已转了几圈?
- (4) 给出各角量表达式.

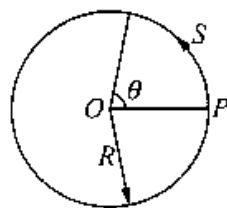


图 1.9

解 (1) $v = \frac{dS}{dt} = v_0 - bt,$

$$a_r = \frac{dv}{dt} = -b,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

所以
$$a = \frac{(v_0 - bt)^2}{R} n - bt$$

$$(2) \text{ 令 } a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(-b)^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}} = b,$$

解出加速度大小等于 b 时的时间为 $t = \frac{v_0}{b}$.

$$(3) \text{ 圈数 } n = \frac{S(\frac{v_0}{b})}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R} \left[v_0 \frac{v_0}{b} - \frac{b}{2} \left(\frac{v_0}{b} \right)^2 \right] = \frac{v_0^2}{4\pi R b}$$

当 $t = \frac{v_0}{b}$ 时, $v = 0$, 说明 $t < \frac{v_0}{b}$ 时, $v > 0$, 物体做匀减速圆周运动, 当 $t > \frac{v_0}{b}$ 时, 质点沿 S 负向运动, 物体做匀加速圆周运动.

$$(4) \text{ 由定义可得 } \theta = \frac{S}{R} = \frac{v_0}{R}t - \frac{b}{2R}t^2,$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{R} - \frac{b}{R}t,$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{b}{R}.$$

§ 1.5 相对运动

运动学中, 对物体运动的描述与参考系的选择有关, 是相对的, 必须指明选择的参考系, 对同一物体的运动, 可以选择不同的参考系进行描述, 描述的结果是不同的, 但它们之间存在着一定的联系.

设一质点 P 在空间中运动, 选择两个参考系 A 、 B 分别对质点的运动进行描述, 然后建立在不同参考系描述结果的关系, 如图 1.10 所示.

在参考系 A 中, 质点 P 的位置矢量为 r_{AP} , 参考系 B 中, 位置矢量为 r_{BP} , 参考系 A 中, 得到参考系 B 的位置矢量为 r_{AB} , 即两个参考系之间的相对运动. 由图看出, 它们满足如下关系

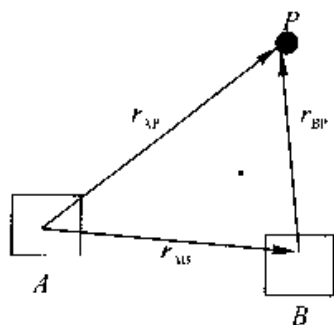


图 1.10
(1-27)

$$r_{AP} = r_{AB} + r_{BP}$$

此式表示通过两个参考系之间的相对运动, 在两个参考系对同一物体的描述结果间建立起联系.

将(1-27)式对时间求一阶导数,得

$$\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt}$$

或
$$\mathbf{v}_{AP} = \mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BP} \quad (1-28)$$

式(1-28)是速度合成定理,通过两个参考系之间的相对运动速度,在同--质点相对于不同参考系的速度间建立了联系. 式中:

\mathbf{v}_{AP} 称为绝对速度,是质点相对于参考系 A 的速度;

\mathbf{v}_{BP} 称为相对速度,是质点相对于参考系 B 的速度;

\mathbf{v}_{AB} 称为牵连速度,是参考系之间的相对运动速度.

将速度关系(1-28)式对时间求一阶导数,得

$$\frac{d\mathbf{v}_{AP}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{AB}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{BP}}{dt}$$

即
$$\mathbf{a}_{AP} = \mathbf{a}_{AB} + \mathbf{a}_{BP} \quad (1-29)$$

此式在质点相对于两个参考系的加速度间建立了联系. 式中:

\mathbf{a}_{AP} 称为绝对加速度,是质点相对于参考系 A 的加速度;

\mathbf{a}_{BP} 称为相对加速度,是质点相对于参考系 B 的加速度;

\mathbf{a}_{AB} 称为牵连加速度,是参考系之间的相对运动加速度.

可见,描述质点运动状态的位置矢量、速度、加速度都具有相对性,对同一质点运动的描述,在不同参考系中其位置矢量、速度、加速度都不同.

例 1-8 雨天一辆车在水平公路上以 20m/s 的速度向东行驶,雨滴在空中以 10m/s 的速度竖直下落,求雨滴相对车厢的速度.

解 如图 1.11,

$$\mathbf{v}_{车地} = 20i\text{m/s} \quad \mathbf{v}_{雨地} = -10j\text{m/s}$$

由伽利略速度变换有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{雨车} &= \mathbf{v}_{雨地} + \mathbf{v}_{地车} = \mathbf{v}_{雨地} - \mathbf{v}_{车地} \\ &= -10j - 20i \end{aligned}$$

这个速度表达式所表现出的关系恰是司机感觉到的雨斜砸在前挡风玻璃上的情景.

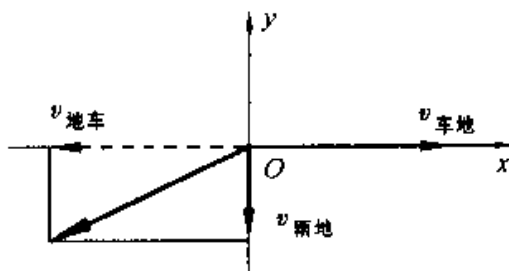


图 1.11

例 1-9 一架飞机水平飞行于 P、Q 两点间,两点间距 l ,飞机相对于空气的速度为 u ,其大小不变,空气相对地面的速度为 v ,其大小也不变,且 $v < u$,求证:

(1) 设 $v = 0$,即空气相对地面静止,则飞机往返于 P、Q 两点间的飞行时间为:

$$t_1 = 2l/u;$$

(2) 若 v 与 \overrightarrow{PQ} 方向一致, 则飞机往返飞行时间为 $t_2 = t_1(1 - v^2/u^2)^{-1}$;

(3) 若 v 与 \overrightarrow{PQ} 垂直, 则飞机飞行时间为 $t_3 = t_1(1 - v^2/u^2)^{-\frac{1}{2}}$.

证明 (1) $u_{\text{飞地}} = u_{\text{飞风}} + u_{\text{风地}} = u_{\text{飞风}}, (u_{\text{风地}} = 0)$

$$P \rightarrow Q, \quad u_{\text{飞风}} = ui$$

$$Q \rightarrow P, \quad u_{\text{飞风}} = -ui$$

所以

$$t_1 = \frac{2l}{u}$$

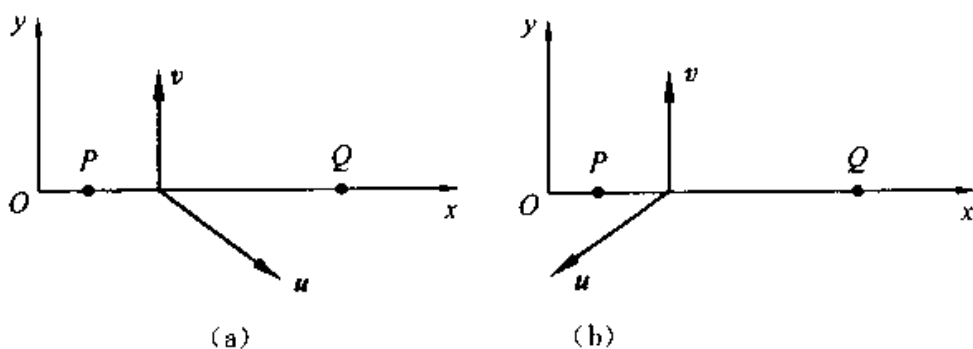


图 1.12

(2) 由 $P \rightarrow Q, u_{\text{飞地}} = u_{\text{飞风}} + u_{\text{风地}} = ui + vi = (u+v)i$, 所以

$$t_2' = l(u+v)^{-1};$$

由 $Q \rightarrow P, u_{\text{飞地}} = u_{\text{飞风}} + u_{\text{风地}} = -ui + vi = (v-u)i$,

所以

$$t_2'' = -l(v-u)^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} t_2 &= t_2' + t_2'' = l \left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v} \right) = l \cdot \frac{2u}{u^2 - v^2} \\ &= \frac{2l}{u} \frac{1}{1 - v^2/u^2} = t_1 \left(1 - \frac{v^2}{u^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

(3) 如图 1.12(a) 由 $P \rightarrow Q$,

$$u_{\text{飞地}} = u_{\text{飞风}} + u_{\text{风地}} = u_{\text{飞风}_x} i + u_{\text{风地}_y} i + vj = u_{\text{飞地}_x} i$$

(飞机相对地实际运行的速度是合速度.)

所以

$$v = -u_{\text{飞风}_y} = -u \sin(\hat{u}, i), u_{\text{飞地}_x} = u_{\text{飞风}_x} = u \cos(\hat{u}, i)$$

即

$$u_{\text{飞地}_x} = \sqrt{u^2 - v^2}$$

$$t_3' = l(u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

由图 1.12(b) $Q \rightarrow P$, $\mathbf{u}_{\text{飞地}} = \mathbf{u}'_{\text{飞风}} + \mathbf{u}'_{\text{飞地}} = u'_{\text{飞风}} \mathbf{i} + u'_{\text{飞风}} \mathbf{j} + v \mathbf{j} = u'_{\text{飞地}} \mathbf{i}$ (飞机相对地实际运行的速度为合速度)

$$v = -u'_{\text{飞风}} \mathbf{j} = -u \sin(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{i})$$

$$u'_{\text{飞地}} = u'_{\text{飞风}} = u \cos(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{i})$$

注意到 $\cos(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{i}) < 0$, 即

$$u'_{\text{飞地}} = -\sqrt{u^2 - v^2}$$

$$t_3'' = (-l) [-(u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}}] = l(u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}$$

所以

$$t_3 = t_3' + t_3'' = 2l(u^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2l}{u} (1 - v^2/u^2)^{\frac{1}{2}} = t_1 \left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

思考题

- 1-1 何谓参考系和坐标系?为什么要引入这些概念?
- 1-2 何谓位矢?试写出位矢在直角坐标系 $Oxyz$ 中的正交分解式,并说明如何计算其大小和方向?为什么说用位矢与用位置坐标描述质点的位置是等效的?
- 1-3 试述位移和路程的意义及两者之间的区别.
- 1-4 试述速度的定义,其大小和方向如何计算?
- 1-5 速度和速率有何区别?有人说:“一辆汽车的速度最大可达每小时 120 千米,它的速率为向东每小时 75 千米?”你觉得这种说法有何不妥?
- 1-6 试述加速度的定义?
- 1-7 当质点作平面运动时,试列出其位矢、位移、速度和加速度等矢量的分量表示式,并由此如何计算这些量的大小和方向?
- 1-8 有没有下列的运动?如果有,请举例说明.
 - (1) 速度很大,加速度很小;
 - (2) 速度很小,加速度很大;
 - (3) 速度不等于零,加速度等于零;
 - (4) 速度等于零,加速度大于零.

1-9 质点作曲线运动, r 是质点的位置矢量, r 是位置矢量的大小, Δr 是某时间内质点的位移, Δr 是位置矢量大小的增量, Δs 是同一时间内的路程. 那么那种说法正确?

- (1) $|\Delta r| = \Delta r$; (2) $\Delta |r| = \Delta r$; (3) $\Delta s = \Delta r$; (4) $\Delta s = |\Delta r|$.

1-10 判断如下说法正确与否:

- (1) 运动物体的速率不变时, 速度可以变化;
 (2) 加速度恒定不变时, 物体的运动方向必定不变;
 (3) 平均速率等于平均速度的大小;
 (4) 不论加速度如何, 平均速率的表达式总可以写成 $\bar{v} = \frac{(v_1 + v_2)}{2}$. 式中 v_1 是初速率, v_2 是末速率.

1-11 质点作匀加速圆周运动, 它的

- (1) 切向加速度的方向不变, 大小变化;
 (2) 切向加速度的大小和方向都在变化;
 (3) 法向加速度的大小和方向都在变化;
 (4) 切向加速度的方向变化, 大小不变.

习 题

1-1 质点沿轨道 AB 作曲线运动, 速率逐渐减小, 图 1.13 中哪一种情况正确地表示了质点在 C 处的加速度? ()

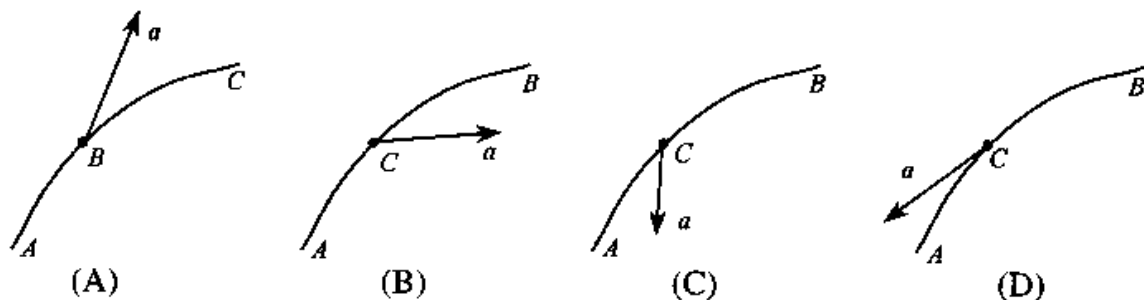


图 1.13

1-2 一质点沿 x 轴运动的规律是 $x = t^2 - 4t + 5$ (SI 制), 则前三秒内它的 ()

- A. 位移和路程都是 3m. B. 位移和路程都是 -3m.

C. 位移是 -3m , 路程是 3m .

D. 位移是 -3m , 路程是 5m .

1-3 一质点的运动方程是 $r = R\cos\omega t i + R\sin\omega t j$, R, ω 为正常数, 从 $t = \pi/\omega$ 到 $t = 2\pi/\omega$ 时间内

(1) 该质点的位移是 ()

- A. $-2Ri$ B. $2Ri$ C. $-2j$ D. 0

(2) 该质点经过的路程是 ()

- A. $2R$ B. πR C. 0 D. $\pi R\omega$

1-4 一细直杆 AB , 竖直靠在墙壁上, B 端沿水平方向以速度 v 滑离墙壁, 则当细杆运动到图 1.14 所示位置时, 细杆中点 C 的速度 ()

- A. 大小为 $v/2$, 方向与 B 端运动方向相同;
 B. 大小为 $v/2$, 方向与 A 端运动方向相同;
 C. 大小为 $v/2$, 方向沿杆身方向;
 D. 大小为 $\frac{v}{2\cos\theta}$, 方向与水平方向成 θ 角.

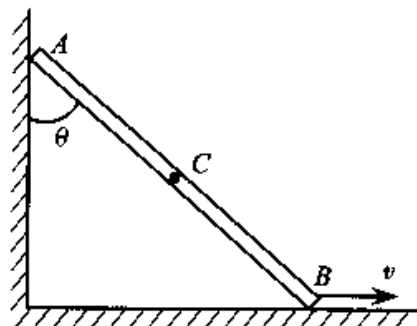


图 1.14

1-5 某人以 4km/h 的速率向东前进时, 感觉风从正北吹来, 如将速率增加一倍, 则感觉风从东北方向吹来, 实际风速与风向为 ()

- A. 4km/h , 从北方吹来 B. 4km/h , 从西北方吹来
 C. $4\sqrt{2}\text{km/h}$, 从东北方吹来 D. $4\sqrt{2}\text{km/h}$, 从西北方吹来

1-6 下列说法哪一条正确?

- A. 加速度恒定不变时, 物体运动方向也不变;
 B. 平均速率等于平均速度的大小;
 C. 不管加速度如何, 平均速率表达式总可以写成: $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$
 D. 运动物体速率不变时, 速度可以变化.

1-7 一物体作如图 1.15 所示的斜抛运动, 测得在轨道 P 点处速度大小为 v , 其方向与水平方向成 30° 角, 则物体在 P 点的切向加速度 $a_t =$ _____, 轨道的曲率半径 $\rho =$ _____.

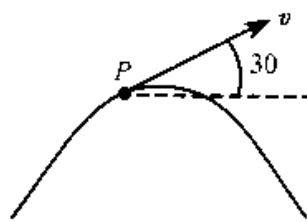


图 1.15

1-8 试说明质点作何种运动时, 将出现下述各种情况 ($v \neq 0$):

A. $a_r \neq 0, a_n \neq 0$; _____.

B. $a_r \neq 0, a_n = 0$; _____.

C. $a_r = 0, a_n \neq 0$; _____.

1-9 AB杆以匀速 u 沿 x 轴正方向运动,带动套在抛物线($y^2 = 2px, p > 0$)导轨上的小环,如图1.16所示,已知 $t = 0$ 时,AB杆与 y 轴重合,则小环C的运动轨迹方程为_____,运动学方程 $x =$ _____, $y =$ _____,速度为 $v =$ _____,加速度为 $a =$ _____.

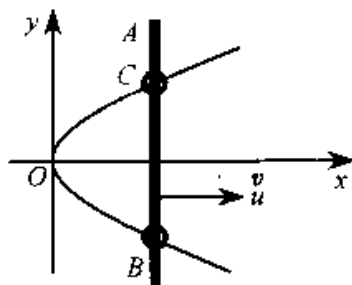


图 1.16

1-10 一质点沿半径为0.2m的圆周运动,其角位置随时间的变化规律是 $\theta = 6 + 5t^2$ (SI制).在 $t = 2s$ 时,它的法向加速度 $a_n =$ _____;切向加速度 $a_r =$ _____.

1-11 甲船以 $v_1 = 10m/s$ 的速度向南航行,乙船以 $v_2 = 10m/s$ 的速度向东航行,则甲船上的人观察乙船的速度大小为_____,向_____航行.

1-12 一质点沿 x 轴运动,坐标与时间的变化关系为 $x = 4t - 2t^3$ (SI制),试计算

- (1) 在最初2s内的平均速度,2s末的瞬时速度;
- (2) 1s末到3s末的位移和平均速度;
- (3) 1s末到3s末的平均加速度,此平均加速度是否可以用 $a = (a_1 + a_2)/2$ 计算;
- (4) 3s末的瞬时加速度.

1-13 一质点的运动方程为 $x = 3t + 5, y = 0.5t^2 + 3t + 4$ (SI制).

- (1) 以 t 为变量,写出位矢的表达式;
- (2) 求质点在 $t = 4s$ 时速度的大小和方向.

1-14 当交叉路口的信号灯变为绿灯时一辆汽车以 $2m/s^2$ 的恒定加速度由静止开行,在同一时刻,有一辆货车以 $10m/s$ 的恒定速率从后面开到并超过这辆汽车,试问:

- (1) 这汽车追上货车时已离开出发点多远?
- (2) 这时汽车的速率多大?
- (3) 分别画出汽车和货车的坐标时间图($x-t$ 图).

1-15 在离水面高度为 h 的岸边,有人用绳子拉船靠岸,船在离岸边 s 距离处,

当人以速率 v_0 匀速收绳时,试求船的速率和加速度大小.

1-16 一张致密光盘(CD)音轨区域的内半径 $R_1 = 2.2\text{cm}$,外半径 $R_2 = 5.6\text{cm}$ (如图 1.17 所示),径向音轨密度 $N = 650$ 条/mm.在 CD 唱机内,光盘每转一圈,激光头沿径向向外移动一条音轨,激光束相对光盘是以 $v = 1.3\text{m/s}$ 的恒定线速度运动的.

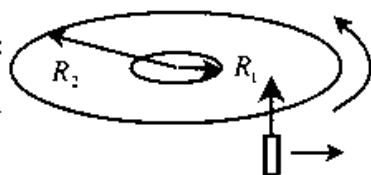


图 1.17

(1) 这张光盘的全部放音时间是多长?

(2) 激光束到达离盘心 $r = 5.0\text{cm}$ 处时,光盘转动的角速度和角加速度各是多少?

1-17 质点 P 在水平面内沿一半径为 $R = 1\text{m}$ 的圆轨道转动,转动的角速度 ω 与时间 t 的函数关系为 $\omega = kt^2$,已知 $t = 2\text{s}$ 时,质点 P 的速率为 16m/s ,试求 $t = 1\text{s}$ 时,质点 P 的速率与加速度的大小.

1-18 设河面宽 $l = 1\text{km}$,河水由北向南流动,流速 $v = 2\text{m/s}$,有一船相对于河水以 $v' = 1.5\text{m/s}$ 的速率从西岸驶向东岸.

(1) 如果船头与正北方向成 $\alpha = 15^\circ$ 角,船到达对岸要花多少时间?到达对岸时,船在下游何处?

(2) 如果要使船相对于岸走过的路程为最短,船头与河岸的夹角为多大?到达对岸时,船又在下游何处?要花多少时间?

第 2 章 牛顿定律及其内在随机性

上一章我们介绍了运动学,讨论了怎样描述质点的运动,但没有讨论质点为什么会做这样或那样的运动,即尚未涉及质点运动状态发生变化的原因.这属于牛顿定律所涉及的范围.牛顿关于运动的三个基本定律是质点动力学的基础,以牛顿三定律为基础建立起来的力学体系叫做牛顿力学.

牛顿力学创建于 17 世纪,其后在研究天体的运动和生产技术中获得了惊人的成功.但是,随着人们广泛的实践活动和理论研究的不断深入,200 多年后人们发现了它的局限性,即它只适用于宏观物体的低速运动.要分析研究微观粒子的高速运动必须用量子力学和相对论,但这并没有丝毫减弱牛顿力学的重要性.至今它不仅仍能说明和预测许多自然现象(包括天体的运动),而且是机械制造、土木建筑、交通运输、航天技术等领域不可或缺的理论基础.

在牛顿力学中最早形成的对物体运动的确定性描述,被称为“确定论”或“决定论”.根据牛顿第二定律,如果已知物体所受的力和它的初始运动状态,则该物体在此以前和以后的运动状态就是惟一确定的.然而,近 30 年来人们在自然界和实验室中观察到了许多混沌现象,它们表现出对初值改变的敏感性,使系统呈现出长时间行为的不确定性或随机性.从而冲破了牛顿力学的决定论观念,揭示出牛顿力学的内在随机性.

本章将介绍牛顿定律及与其相联系的概念,说明直接利用它们分析解决问题的方法;讨论如何在非惯性系中形式上仍利用牛顿定律分析解决问题;最后初步介绍混沌现象产生的条件、所经历的途径及其特征.

§ 2.1 牛顿定律及其应用

牛顿(Isaac Newton, 1643—1727),英国杰出的物理学家,经典物理学的奠基人.

牛顿的不朽著作《自然哲学的数学原理》,总结了前人和他自己的研究成果.他



在这本书中定义了质量、力和动量,提出了动量改变与外力的关系;提出绝对空间和绝对时间的概念;提出了力学的三大定律和万有引力定律,把地面上物体的运动和太阳系内的行星的运动统一在相同的物理定律之中,从而完成了人类文明史上第一次自然科学的大综合。他的理论是人类认识客观世界过程中的一次飞跃,它不仅标志着16—17世纪科学革命的顶点,也是人类文明、进步的划时代标志。

牛顿的科学观是因果决定论的科学观。

牛顿研究方法的一大特点是对错综复杂的自然现象敢于简化,善于简化,从而建立起理想的物理模型。

牛顿研究方法的另一特点是运用形象思维的方法,进行创造性的思维活动,他构思了一些神奇的理想实验,创造了新的物理图像,来揭示天体运动与地面上物体运动的统一性。

牛顿的科学思想和科学方法对他以后300年来自然科学的发展产生了及其深远的影响。

牛顿对人类的贡献是巨大的,然而他对自己有清醒地评价,他曾说过:“如果说我比多数人看得远一些的话,那是因为我站在巨人们的肩上。”

1687年,牛顿出版了他的名著《自然哲学的数学原理》,在这本书中他提出了力学的三大定律和万有引力定律,对宏观物体的运动给出了精确的描述。他把地面上物体的运动和太阳系内行星的运动统一在相同的物理定律之中,从而完成了人类文明史上第一次自然科学的大综合。他总结和发展了他以前的物理学的全部重要成果,把那些孤立的、逻辑上各自独立的物理概念和物理定律,发展成为能够表述因果性的一个完整体系。

一、牛顿第一定律

牛顿第一定律可表述为:任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态,直到外力迫使它改变运动状态为止。这就是牛顿第一定律。牛顿第一定律的数学形式表示为

$$F = 0 \text{ 时, } v = \text{恒矢量} \quad (2-1)$$

第一定律表明,任何物体都具有保持其运动状态不变的性质,这个性质叫做惯

性,所以,牛顿第一定律以前曾被称为惯性定律。

第一定律还表明,正是由于物体具有惯性,所以要使物体的运动状态发生变化,一定要有其它物体对它作用,这种作用被称之为力。“力”是牛顿力学中最基本的概念之一,可是本书到现在还没有给出力的严格定义。有鉴于此,我们不妨采用较为现代的说法把惯性定律表述为:

孤立粒子永远保持静止或匀速直线运动状态。

所谓“孤立粒子”,就是不受任何相互作用的粒子,它应该是完全自由的。实际上,我们不可能真正观察到这样的粒子。自然界中完全不受其他作用的物体是不存在的,物体总会受到接触力或场动力的作用。因此,牛顿第一定律是不能直接用实验严格验证的,它是理想化抽象思维的产物。

如果有几个外力作用在一个质点上,而且合力为零,这时质点的运动情况与它不受外力作用时的情况是一样的。

由牛顿第一定律我们知道,力是使物体运动状态发生变化的原因,而物体的惯性则反映了物体改变运动状态的难易程度。这两者都能对物体运动状态的变化发挥作用。

二、牛顿第二定律

物体在运动时总具有速度。我们把物体的质量 m 与其运动速度 v 的乘积叫做物体的动量,用 p 表示,即

$$p = m v \quad (2-2)$$

动量 p 显然也是一个矢量,其方向与速度 v 的方向相同。与速度可以表示物体运动状态一样,动量也是表述物体运动状态的物理量,但动量较之速度其涵义更为广泛,意义更为重要。当外力作用于物体时,其动量要发生改变。牛顿第二定律阐明了作用于物体的外力与物体动量变化的关系。

牛顿第二定律可表述为:动量为 p 的物体,在合力 $F(= \sum F_i)$ 的作用下,其动量随时间的变化率等于作用于物体的合外力,即

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2-3a)$$

当物体在低速情况下运动时,即物体的运动速度 v 远小于光速 $c(v \ll c)$ 时,物体的质量 m 可以视为是不依赖于速度的常量。于是式(2-3a)可写成

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2-3b)$$

或
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2-3c)$$

式(2-3)是牛顿第二定律的数学表示式,又称牛顿力学的质点动力学方程。

牛顿力学中引入的物体质量是物体惯性的量度,叫做惯性质量。设同样的外力作用在不同质量 m_1 和 m_2 的物体上,以 a_1, a_2 分别表示它们由此产生的加速度的数值,则有

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

即在相同作用力的情况下,物体的质量和加速度成反比,这意味着质量大的物体抵抗运动状态变化的能力强,也就是它的惯性大。惯性质量和物质的多少是不同的两种概念,物质的多少用摩尔数说明,SI单位为摩尔(mol)。

牛顿第二定律是牛顿力学的核心,应用它解决问题时必须注意以下几点:

(1) 牛顿第二定律只适用于描述质点的运动。物体作平动时,物体上各点的运动情况完全相同,所以物体的运动可看作是质点的运动,此时这个质点的质量就是整个物体的质量。以后如不特别指明,在论及物体的平动时,都是把物体当作质点来处理的。

(2) 牛顿第二定律所表示的合力与加速度之间的关系是瞬时关系。也就是说,加速度只在外力有作用时才产生,外力改变了,加速度也随之改变。

(3) 力的叠加原理。当几个力同时作用于一个物体时, \mathbf{F} 表示作用在该物体上的合力

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

合力 \mathbf{F} 所产生的加速度 \mathbf{a} 与每个力 \mathbf{F}_i 所产生的加速度 \mathbf{a}_i 的矢量和是一样的,这就是力的叠加原理。

(4) 牛顿第二定律的矢量性。式(2-3)是矢量形式的方程,用它分析求解习题时,应根据问题的不同选择适当的坐标系。

在直角坐标系中,它在 Ox, Oy 和 Oz 轴上的分量式分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= ma_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ F_y &= ma_y = m \frac{dv_y}{dt} \\ F_z &= ma_z = m \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

式中 F_x, F_y 和 F_z 分别表示作用在物体上所有的外力在 Ox, Oy 和 Oz 轴上的分量之和; $F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$; a_x, a_y 和 a_z 分别表示物体加速度 \mathbf{a} 在 Ox, Oy 和 Oz 轴上的分量.

对于质点在平面上作曲线运动,常采用平面自然坐标系,这时牛顿第二定律的切向、法向分量方程为

$$\left. \begin{aligned} F_t &= ma_t = m \frac{dv}{dt} \\ F_n &= ma_n = m \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式中 F_t 和 F_n 分别表示合力的切向分量和法向分量,相应地 a_t 和 a_n 叫做切向加速度和法向加速度, ρ 是曲线的曲率半径.

三、牛顿第三定律

牛顿第一定律指出,物体只有在外力作用下才改变其运动状态,牛顿第二定律给出了物体的加速度与作用于物体的力和物体质量之间的数量关系,牛顿第三定律则说明力具有物体间相互作用的性质.

牛顿第三定律可表述为:两个物体之间的作用力 F 和反作用力 F' ,沿同一直线,大小相同,方向相反,分别作用在两个物体上. 牛顿第三定律的数学表达式为

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (2-6)$$

正确理解牛顿第三定律,对分析物体受力情况是很重要的.分析物体受力情况时必须注意以下几点:

- (1) 作用力与反作用力是矛盾的两个方面,它们互以对方为自己存在的条件,同时产生,同时消灭,任何一方都不能独立地存在.
- (2) 作用力和反作用力是分别作用在两个物体上的,因此它们不能相互抵消.
- (3) 作用力和反作用力总是属于同种性质的力.例如作用力是万有引力,那么反作用力也一定是万有引力.

四、力学中常见的几种力

力学中常见的力有:重力、弹性力、摩擦力.

1. 重力

自然界中,大到天体,小到微观粒子,任何两个物体之间都存在着相互吸引的

力,这种力称为万有引力.其规律遵从牛顿提出的万有引力定律:任何两个质点之间的万有引力的大小 F 与这两个质点的质量乘积 $m_1 \cdot m_2$ 成正比,与它们之间的距离 r 的平方成反比,方向沿两质点的连线.即

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2-7)$$

式中 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$,称为引力常量.

在万有引力定律中引入的物体质量,称为引力质量.引力质量与在牛顿运动定律中引入的惯性质量一样,也是物体自身的一种属性的量度,它表征了物体之间引力作用的强度.虽然引力质量和惯性质量代表了物体的两种不同的属性,然而精确的实验研究和理论分析表明,对于任一物体来说,这两个质量都是相等的.这一重要结论正是爱因斯坦创立广义相对论的实验基础.

在忽略地球自转的情况下,通常把地面附近尺寸不大的物体所受地球的引力称为该物体的重力,其大小等于物体的重量,方向竖直向下.若把地球视为质量均匀分布的球体,则质量为 m 的物体所受重力的大小为

$$P = G \frac{mM_e}{R^2} = mg \quad (2-8)$$

式中 M_e 是地球的质量, R 是地球的半径, $g = G \frac{M_e}{R^2}$ 是重力加速度.

2. 弹性力

两个相互接触并产生弹性形变的物体企图恢复原状而彼此互施作用力,这种力称为弹性力.弹性力的方向始终与使物体发生形变的外力方向相反.弹性力的大小与形变的关系,一般说来比较复杂.弹性力的表现形式有很多种,下面只讨论常见的三种.

弹簧被拉伸或被压缩时,施于物体上的力是弹性力.弹簧和形变的关系比较简单,遵从胡克定律:在弹性限度内,弹性力的大小 F 与弹簧的形变量 x 成正比.即

$$F = -kx \quad (2-9)$$

式中 k 为弹簧的劲度系数,其值决定于弹簧本身的性质;负号表示弹性力的方向,弹簧弹性力的方向总是指向要恢复它原长的方向.

绳子被拉紧时所产生的弹性力常称为张力.张力的方向总是沿着绳子指向绳收缩的方向.一般情况下,绳子上各处张力的大小是不相等的,但是如果不计绳子的质量(称为轻绳),那么绳子上的张力处处相等,对此,读者可自行分析.当绳子受到拉

伸时,在某截面上的张力就是截面两边的两段绳子间的拉力,这是作用和反作用的一对力.

重物放在支承面上产生的正压力以及支持力也是弹性力.支持力的方向总是垂直于重物与支承面接触点的公切面并指向重物.压力和支持力的大小由物体的受力情况和运动情况共同决定.

3. 摩擦力

两个相互接触的物体有相对滑动时,在它们的接触面间产生的一对阻碍相对运动的力,称为滑动摩擦力.实验表明,滑动摩擦力的方向与物体相对运动的方向相反,其大小 f_k 与物体间的正压力 N 成正比,即

$$f_k = \mu_k N \quad (2-10)$$

式中 μ_k 为滑动摩擦因数,它不仅与接触面的材料、粗糙程度、干湿程度等因素有关,还随相对滑动速度的大小而变化.在大多数情况下, μ_k 随速度的增加而减小.当相对速度不太大时, μ_k 可视为常数.

两个相互接触的物体,虽保持相对静止,但有相对运动的趋势时,在它们的接触面间也会产生一对阻碍相对运动趋势的力,称为静摩擦力.实验表明,静摩擦力的方向与物体相对运动趋势的方向相反,其大小视物体的受力情况而定.

把物体放在水平面上,有一个沿水平方向的外力 F 作用于物体上,若外力 F 较小,物体尚未滑动,这时静摩擦力 F_s 与外力 F 在数值上相等,其方向与外力 F 的方向相反.静摩擦力 F_s 随外力 F 的增大而增大,直到 F 增大到某一数值时,物体相对平面即将滑动的临界状态,这时静摩擦力达到最大值,称为最大静摩擦力.最大静摩擦力 F_{smax} 是静摩擦力 F_s 的极限.实验表明,最大静摩擦力的数值 F_{smax} 与物体的正压力 N 成正比,即

$$F_{smax} = \mu_s N \quad (2-11)$$

μ_s 叫做静摩擦因数.静摩擦因数与两接触物体的材料性质以及接触面的情况有关,而与接触面的大小无关.

应该强调指出,在一般情况下,静摩擦力总满足 $F_s \leq F_{smax}$.

五、牛顿定律的应用

应用牛顿定律求解动力学问题,可按下述思路分析进行:

(1) 认物体

在有关问题中选定一个物体(视为质点)作为分析对象,如果问题涉及几个物体,那就一个一个地作为对象进行分析,认定出每个物体的质量.

(2) 看运动

分析所认定物体的运动状态,包括它的轨迹、速度和加速度.问题涉及几个物体时,还要找出它们运动学之间的联系,亦即它们的速度或加速度之间的关系.

(3) 查受力

找出被认定物体所受的一切外力,不能有所遗漏.这些力可能是重力、弹力、摩擦力等等.而弹力又常常表现为接触面的压力或绳子的张力.画出示力图,把物体受力情况和运动情况表达出来.

(4) 选坐标

根据物体的运动情况,选择适当的坐标系,确定坐标正方向.当物体沿直线运动时,一般选取加速度的方向为坐标轴的正方向,不易出错.

(5) 列方程

把上面分析出的质量、加速度和力用牛顿第二定律联系起来,列出与所选坐标系对应的牛顿第二定律的分量形式方程.在方程式足够的情况下就可以求解未知量了.

(6) 作讨论

通过分析讨论,巩固和增强对物理概念和定律的理解,提高分析能力.

例 2-1 应以多大速度发射,才能使人造地球卫星绕地球作匀速圆周运动?

解 近似认为地球是一个半径为 R 的均匀球体,人造地球卫星离地面的高度为 h ,它绕地球作匀速圆周运动所需要的向心力为

$$F_1 = m \frac{v^2}{r} = \frac{mv^2}{R+h},$$

式中 m 是人造地球卫星的质量, v 是运行速率, r 是轨道半径.若认为卫星只受地球引力的作用,地球的引力就是人造地球卫星作匀速圆周运动的向心力.地球的引力可根据万有引力定律求得

$$F_2 = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{(R+h)^2},$$

由 $F_1 = F_2$ 得

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

在半径等于地球半径的圆形轨道上运行的人造地球卫星所需要的速度,也就是发射这样的卫星所需要的速度,称为第一宇宙速度.在上式中令 $h = 0$,并将重力加速度

式 $g = G \frac{M_e}{R^2}$ 代入,即得第一宇宙速度为

$$v_1 = \sqrt{Rg}$$

因为地球的半径为 $R = 6.37 \times 10^6 \text{m}$,重力加速度为 $g = 9.8 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,所以

$$v_1 = 7.9 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 2-2 物体 A 和 B 的质量分别为: $m_A = 1.50 \text{kg}$, $m_B = 2.85 \text{kg}$,它们之间用绳子连接,在倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的斜面上向下滑动,如图 2.1 所示. A 和 B 与斜面间的滑动摩擦因数分别为 $\mu_{kA} = 0.15$, $\mu_{kB} = 0.21$.

(1) 求物体 A 和 B 的加速度;

(2) 求绳中的张力;

(3) 如果将物体 A 和 B 互换位置,(1) 和 (2) 的结果又如何?

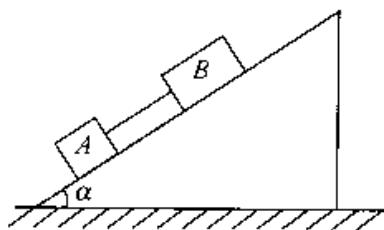


图 2.1

解 由于 A 和 B 是由绳子连接在一起,会出现两种情况:绳的张力为零和不为零.若绳的张力为零,必然是 B 的加速度不小于 A 的加速度,若绳子的张力不为零,A 和 B 必然有共同的加速度.所以,应该先列出牛顿方程,先假设物体 A 和 B 未用绳连接,分别计算出 A 和 B 的加速度,来判断绳中的张力是否为零,就可以得到另一个方程,即可求解.

先假设物体 A 和 B 未用绳连接,取沿斜面向下为 x 正方向,由牛顿第二定律,对 A 有

$$m_A g \sin \alpha - \mu_{kA} m_A g \cos \alpha = m_A a'_A$$

对 B 有 $m_B \sin \alpha - \mu_{kB} m_B g \cos \alpha = m_B a'_B$

由此解得

$$a'_A = g \sin \alpha - \mu_{kA} g \cos \alpha = 3.63 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a'_B = g \sin \alpha - \mu_{kB} g \cos \alpha = 3.12 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

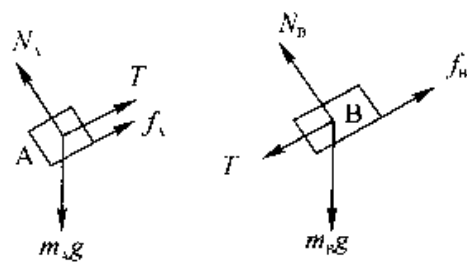


图 2.2

(1) 如图 2.1 所示,A 在下,B 在上.由于 $a'_A > a'_B$,所以绳被拉紧,二者以完全相同的加速度 $a'_A = a'_B = a$ 一起下滑,则由牛顿第二定律,有

$$m_A g \sin \alpha - \mu_{kA} m_A g \cos \alpha - T = m_A a$$

$$m_B g \sin \alpha - \mu_{kB} m_B g \cos \alpha + T = m_B a$$

由以上两方程可解得

$$a = g \sin \alpha - \frac{\mu_{kA} m_A + \mu_{kB} m_B}{m_A + m_B} g \cos \alpha$$

$$= 3.29 \text{ m/s}^2$$

(2) 图 2.1 中绳的张力

$$T = m_A g \sin \alpha - \mu_{kA} m_A g \cos \alpha - m_A a = 0.51 \text{ N}$$

(3) 如果将物体 A 和 B 互换位置, 即 A 在上, B 在下, 由于 $a'_A > a'_B$, 则绳子将松弛, 所以, $T = 0$, 此时物体 A 和 B 的加速度分别为

$$a_A = a'_A = 3.63 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = a'_B = 3.12 \text{ m/s}^2$$

例 2-3 一条长为 l 的细绳, 一端系着质量为 m 的小球, 另一端固定在空间一点. 当小球竖直悬挂时, 给小球一个足够大的水平方向的瞬时速度 v_0 , 于是小球在一个铅直的水平面内作圆周运动. 忽略空气阻力, 试问:

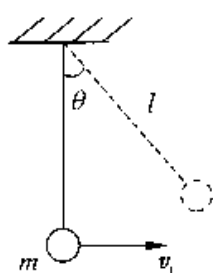


图 2.3

(1) 小球在任意位置时的线速度和绳的张力各有多少?

(2) 若使小球到达最高点时受到绳子的拉力为零, 则 v_0 与 l 关系如何?

解 (1) 以小球为研究对象, 小球在任意位置受到重力 mg 和绳子的拉力 T , 由于小球在平面上作圆周运动, 所以可选取自然坐标, 如下图所示, 法线方向指向圆心, 切线方向与小球运动方向一致.

根据牛顿第二定律列出下列运动方程:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{l} \frac{dv}{d\theta} \quad (3)$$

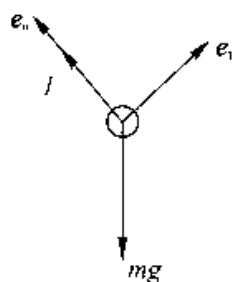


图 2.4

将式(3)代入式(1)得

$$m \frac{v dv}{l d\theta} = -mg \sin \theta$$

整理得

$$v dv = -gl \sin \theta d\theta$$

将上式积分

$$\int_{v_0}^v v dv = -gl \int_0^\theta \sin\theta d\theta$$

得
$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gl(\cos\theta - 1)$$

因此, 小球在任意位置时, 速度的大小为

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gl(\cos\theta - 1)}$$

将 v 代入式(2), 可得小球在任意位置时绳中的张力

$$T = m(3g\cos\theta - 2g + \frac{v_0^2}{l}) \quad (4)$$

(2) 小球达到最高点时, $\theta = 180^\circ$, $T = 0$. 由(4) 式得

$$0 = m(3g\cos 180^\circ - 2g + \frac{v_0^2}{l})$$

所以

$$v_0 = \sqrt{5gl}$$

例 2-4 小球在水中竖直沉降的速度.

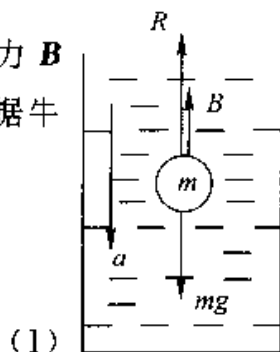
已知小球的质量为 m , 水对小球的浮力为 B , 水对小球运动的粘性阻力为 $R = -kv$, 式中 k 是与水的粘性、小球的半径有关的一个常量.

解 先对小球所受的力作一分析: 重力 mg 竖直向下; 浮力 B 竖直向上; 粘性力 R 竖直向上. 取向下方为坐标轴正方向, 根据牛顿第二定律, 小球的运动方程可写为

$$mg - B - kv = m \frac{dv}{dt}$$

则

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - B - kv}{m}$$



(1)

图 2.5

假设 $t = 0$ 时, 小球初速度为零, 由式(1)可知, 此时加速度有最大值 $(= g - \frac{B}{m})$. 当小球速度 v 逐渐增加时, 其加速度就逐渐减小了, 令

$$v_1 = \frac{mg - B}{k} \quad (2)$$

于是式(1)可化作

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k(v_1 - v)}{m} \quad (3)$$

或

$$\frac{dv}{v_1 - v} = \frac{k}{m} dt$$

对上式两边取积分,则有

$$\int_0^v \frac{dv}{v_T - v} = \int_0^t \frac{k}{m} dt$$

$$\ln \frac{v_T - v}{v_T} = -\frac{k}{m} t$$

$$v_T - v = v_T e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$v = v_T (1 - e^{-\frac{k}{m} t}) \quad (4)$$

式(4)表明小球沉降速度 v 随 t 增大的函数关系,如图 2.6 所示.

由式(4)可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v = v_T$, 而当 $t = \frac{m}{k}$ 时,

$$v = v_T \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.632v_T$$

所以,只要 $t \gg \frac{m}{k}$ 时,就可以认为 $v \approx v_T$. 我们把 v_T 叫做极限速度,它是小球沉降所能达到的最大速度.也就是说,当下降时间符合 $t \gg \frac{m}{k}$ 条件时,小球即以极限速度匀速下降.

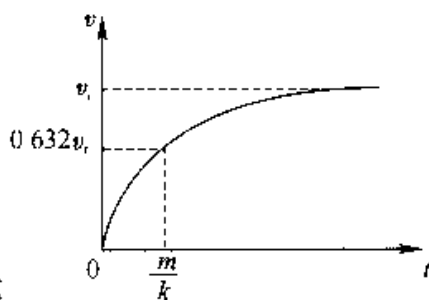


图 2.6

因小球在粘性介质中的沉降速度与小球半径有关,利用不同大小的小球有不同沉降速度的事实,可用来分离大小不同的球形微粒.

所有物体在气体或液体中降落,都存在类似情况.物体越是紧密厚实,它沉降时极限速度就越大.典型例子(十分近似)如下:雨滴, 7.6m/s ; 烟粒, 10^{-3}m/s ; 人 7.6m/s .

飞行员的跳伞集体表演是极限速度的一个有趣的例子.

§ 2.2 物理量的单位和量纲

一、基本单位和导出单位

对于一个物理量的测量结果,一般应包括所得的数值和所用的单位.物理量很多,如果各自选择不同的单位,运算将十分复杂.事实上,由于物理量是通过描述自然规律的方程式或定义而相互联系的,因此没有必要独立地规定每一个物理量的单

位,只要选定一组数目最少的互相独立的物理量作为基本量,并为每个基本量规定一个基本单位,其它物理量的单位则可按照它们与基本量之间的关系式(定义或定律)导出来,这些物理量叫做导出量.导出量的单位都是基本单位的组合,称为导出单位.

在历史上,物理量的单位制有很多种,这不仅给工农业生产和人民生活带来诸多不便,而且也不规范.1960年,第十一届国际计量大会通过了国际单位制(简称SI),SI是国际单位制的法文(Le Système International d'Unités)的缩写.并制定了基本单位、导出单位和辅助单位.

在国际单位制中,选择了七个量作为基本量,即长度、质量、时间、电流、热力学温度、物质的量和光强度.SI基本单位的定义如下:

(1) 长度的单位为 m(米),1m 等于在时间间隔 $1/299\,792\,458$ 秒内光在真空中所传播的长度.

(2) 质量的单位为 kg(千克),1kg 等于国际千克原器的质量.

(3) 时间的单位为 s(秒),1s 等于铯 133 原子基态两个超精细能级之间跃迁相对应的辐射的 $9\,192\,631\,770$ 个周期所持续的时间.

(4) 电流的单位为 A(安培),1A 被定义为“一恒定电流,它若保持在处于真空中相距 1 米的两无限长、而圆截面可以忽略的平行直导线内,则在此两导线之间每米长度上产生的力等于 2×10^{-7} 牛顿.”

(5) 热力学温度的单位为 K(开尔文),1K 是水的三相点的热力学温度的 $1/273.16$.

(6) 物质的量的单位为 mol(摩尔),1mol 是一个系统的物质的量,该系统中所包含的结构粒子与 0.012 kg 碳 12 的原子数目相等.

(7) 光强度的单位为 cd(坎德拉),1cd 是在一定方向上发射频率为 5.4×10^{14} 赫兹的单色辐射,且在此方向上具有 $(1/683)$ 瓦特每球面度的辐射强度的光源的发光强度.

有了基本单位,就可以通过有关的定义或定律由它们构成导出量的单位.例如,根据速度的定义 $v = \frac{dr}{dt}$ 和加速度的定义 $a = \frac{dv}{dt}$,可导出它们的 SI 单位分别是 $m \cdot s^{-1}$ 和 $m \cdot s^{-2}$;根据牛顿定律 $F = ma$,可导出力的 SI 单位是 N($1N = 1kg \cdot m \cdot s^{-2}$).

1984 年 2 月 27 日,我国国务院颁布实行以国际单位制(SI)为基础的法定单位制.本书就采用这种法定的国际单位制.

二、量纲

基本量选定后,其它物理量都可通过既定的物理关系与基本量联系起来.为了定性地描述物理量,特别是定性地给出导出量与基本量的关系,我们引入量纲的概念.在不考虑数字和矢量等因素时,表示一个量是由哪些基本量导出的及如何导出的式子,称为此量的量纲.任一个物理量的量纲式用基本量的幂次之积表示,幂次指数称为量纲指数.常用 L, M, T, I, Θ, N, J 分别表示七个基本量长度、质量、时间、电流、温度、物质的量、发光强度的量纲,则任一个物理量 Q 的量纲可以表示为

$$[Q] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\epsilon} N^{\lambda} J^{\eta} \quad (2-12)$$

其中 $[Q]$ 表示物理量 Q 的量纲,幂次指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda, \eta$ 称为量纲指数.

例如,速度 v 、加速度 a 、力 F 和动量 p 的量纲可以分别表示为

$$\begin{aligned} [v] &= LT^{-1} & [a] &= LT^{-2} \\ [F] &= LMT^{-2} & [p] &= LMT^{-1} \end{aligned}$$

量纲的概念在物理学中很重要.量纲服从的规律叫做量纲法则,它有广泛地应用,这里仅提出常见的两条:

1. 检验公式的正确性

由于只有量纲相同的项才能进行相加、相减和用等号相连接,所以它的一个简单而重要的应用是检验公式的正确性.

例如,我们从理论上推出匀变速直线运动的速度与位移、加速度之间的公式

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

等号左右两边的量纲均为 $L^2 T^{-2}$,因此至少在量纲方面上式是正确的,可以进一步通过其他方式(比如实验)检验其正确性.如果所推出的公式不符合量纲法则,该公式必然是错误的.

2. 进行物理量单位的换算

由于量纲公式表示了物理量与基本量之间的关系,物理量单位是随着基本量单位的改变而改变的,因此,量纲公式还可以用来进行物理量不同单位之间的换算.

单位是量度量纲的尺度.单位和量纲既有联系,又是两个不同的概念.

§ 2.3 惯性系与非惯性系

运动是绝对的,但对运动的描述是相对的.对于不同的参考系,同一物体的运动形式可以不同.尽管如此,相对于任意参考系,运动的描述都是有意义的.因而如果问题只涉及运动的描述,那是完全可以根据研究问题的方便任意选择参考系的.但是如果问题涉及运动和力的关系,即要应用牛顿运动定律时,是否也可以任意选择参考系呢?回答是否定的.

一、惯性系与非惯性系

我们通过下面的例子进行讨论.

设想在火车车厢内的一个光滑桌面上,放一个小球.当车厢相对地面以匀速前进时,这个小球相对桌面处于静止状态,而路基旁的人则看到小球随车厢一起作匀速直线运动.这时,无论是以车厢还是以地面作为参考系,牛顿运动定律都是适用的.因为小球在水平方向不受外力作用,它保持静止或匀速直线运动状态.但当车厢相对于地面以加速度 a 向前运动时,车厢内的乘客观察到此小球相对于车厢内的桌面以加速度 $-a$ 向后作加速运动.这个现象,对于不同参考系的观察者,可以得出不同的结论:站在路基旁边的人,觉得这件事是很自然的,因为小球和桌面之间非常光滑,它们之间的摩擦力可以忽略不计,因此,当桌面随车厢一起以加速度 a 向前运动时,小球在水平方向并没有受到外力作用,所以它仍保持原来的运动状态,牛顿运动定律此时仍然是适用的.然而对于坐在车厢内的乘客来说,这就很不好理解了,既然小球在水平方向没有受到外力作用,小球怎么会在水平方向具有 $-a$ 的加速度呢?由此可见,牛顿运动定律不是对任意的参考系都适用的.我们把牛顿运动定律在其中成立的参考系叫做惯性参考系,简称惯性系.

惯性系有一个重要的性质,即:如果我们确认了某一参考系为惯性系,则相对于此参考系作匀速直线运动的任何其它参考系也一定是惯性参考系.

反过来我们也可以说,相对于一个惯性系做加速运动的参考系,一定不是惯性参考系,或者说是一个非惯性系.

要确定一个参考系是不是惯性系,只能依靠观察和实验.严格而言,地球和太阳都不是精确的惯性系.地球绕太阳公转的向心加速度约为 $5.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$,而地球表面赤道处由地球自转造成的向心加速度可达到 $3.4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$;太阳系虽是比地球

更精确一些的惯性系,但它仍以约 $3 \times 10^{-16} \text{ m} \cdot \text{s}^2$ 的向心加速度随银河系旋转.

目前,天文学上最好的实用惯性系,是以选定的 1535 颗恒星平均静止位形作为基准的参考系——FK4 系.然而,对于日常所见的运动以及一般的工程应用,固定在地面上的参考系可以看成是近似程度相当好的基本惯性系.

二、惯性力

在非惯性系中,牛顿运动定律是不成立的.如果引入一个新概念——惯性力 F_i ,就可形式上方便地利用牛顿第二定律分析问题.

1. 加速平动参考系中的惯性力

加速平动参考系是指参考系的坐标原点相对惯性系作加速直线运动,但坐标轴没有转动的非惯性系.

设有一个质量为 m 的质点,相对于某一惯性系 S ,它在实际的外力 F 作用下产生加速度 a ,根据牛顿第二定律,有

$$F = ma$$

设想另一参考系 S' ,相对于惯性系 S 以加速度 a_0 平动.在 S' 参考系中观测,质点的加速度是 a' .由运动的相对性可知

$$a = a' + a_0$$

将此式代入上式可得

$$F = m(a' + a_0) = ma' + ma_0$$

或者写成

$$F + (-ma_0) = ma' \quad (2-13)$$

此式表明,质点受的合外力 F 并不等于 ma' ,因此牛顿定律在参考系 S' 中不成立.但是如果我们认为在 S' 系中观察时,除了实际的外力 F 外,将 $(-ma_0)$ 也计入合力之内,则(2-13)式就可以形式上理解为:在 S' 系内观测,质点所受的合外力也等于它的质量和加速度的乘积.这样就可以在形式上应用牛顿第二定律了.

可见,在加速平动参考系中,惯性力为

$$F_i = -ma_0 \quad (2-14)$$

式(2-13)中 F 是实际存在的各种力,即“真实力”.惯性力 F_i 只是参考系的非惯性运动的表现形式,或者说是物体的惯性在非惯性系中的表现.它不是物体间的相互作用,也没有反作用力.因此惯性力又称作虚拟力.

2. 转动参考系中的惯性离心力

如图 2.7 所示,在水平放置的转台上,有一条弹性细绳的一端系在转台中心,另一端系一质量为 m 的物体. 设转台平面非常平滑,它与物体间的摩擦力可略去不计. 转台可绕垂直于转台中心的竖直轴以匀角速度 ω 转动. 有两个观察者,一个站在地面上(处在惯性系中),另一个相对转台静止并随转台一起转动(处在非惯性系中). 当转台转动时,站在地面上的观察者观察到弹性细绳被拉长. 这时,细绳对小球作用的力为指向转台中心的向心力 F ,力 F 的大小为 $mr\omega^2$, r 为物体到中心 O 的距离. 从牛顿第二定律来说,在向心力作用下,小球作匀速率圆周运动

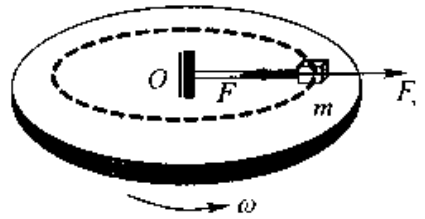


图 2.7

$$F = ma_n = mr\omega^2$$

这一点是很好理解的.

相对转台静止的另一个观察者,虽也观察到弹性细绳被拉长,有力 F 沿向心方向作用在小球上,但小球却相对转台静止不动,这就不好理解了. 为什么有力作用在小球上,小球却静止不动呢?于是这个观察者认为,要使小球保持平衡的事实仍然遵从牛顿第二定律,就必须想象有一个与向心力方向相反、大小相等的力

$$F_c = m\omega^2 r \quad (2-15)$$

作用在小球上,这个力 F_c 叫做惯性离心力,则

$$F - mr\omega^2 = 0$$

三、潮汐

对潮汐现象的解释是应用非惯性系分析物体受力的一个很好的例子.

潮汐是海水周期性的涨落现象. 我国自古有“昼涨称潮,夜涨称汐”的说法,这就是说潮汐现象的特点是每昼夜有两次高潮,在理想情况下,它们分别出现在地表离月球最近和最远的地方. 潮汐现象是月球和太阳对海水的引力以及地球公转和自转的结果.

按照广义相对论的观点,引力与惯性力是等价的. 固着在引力场中自由降落的物体上的参考系,是一个理想的局域惯性参考系.

引力与惯性力的等价性只在小范围内是“精确的”,设想有一个足够大的“自由降落的升降机”,当其中引力场的不均匀性不能忽略时,惯性力就不能把引力完全抵消了. 如图 2.8(a) 所示,在自由降落升降机内选取 5 个质点, C 在中央,即系统的质

心上, A 和 B 分别在 C 的左、右, D 和 E 分别在 C 的上、下方. 考虑到引力是遵从平方反比律且指向地心的, 与中央质点 C 所受的引力相比, A 和 B 受到的引力略向中间偏斜, D 因离地心稍远而所受引力稍小, E 因离地心稍近而所受引力稍大. 由于整个参考系是以质心 C 的加速度运动的, 其中的惯性力只把 C 点所受的引力精确抵消, 它与其它各质点所受的引力叠加, 都剩下一部分残余的力. 它们的方向如图 2.8(b) 所示, A 和 B 受到的残余力指向 C, D 和 E 受到的残余力背离 C, 如果在中央 C 处有个较大的水珠的话, 严格地说它也不是球形, 而是沿上下方向拉长了的椭球. 这种“残余引力”称为引潮力.

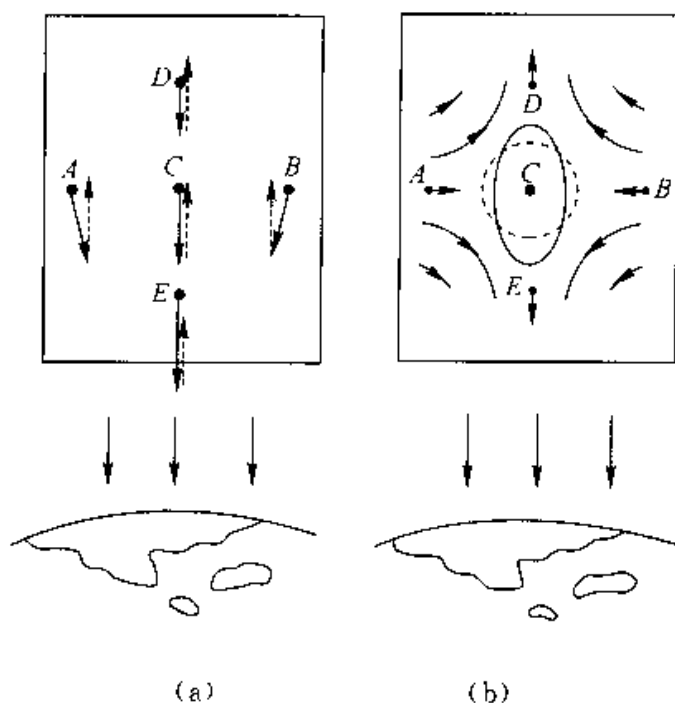


图 2.8 自由降落升降机内的引潮力

地心参考系还是一个理想惯性系, 因为除万有引力外它不受任何其他力, 它是一个在引力场中自由飞行的物体. 把整个地球当作一个“航天器”来考察其中由引力不均匀性造成的效应. 若忽略海水相对于地面运动的环流, 地球自转造成的惯性离心力已计算在海水随纬度而变的视重里. 在这个巨大的理想惯性参考系里, 所有海水形成一个巨大的水滴. 如果没有外部引力的不均匀性, 这个大水滴将精确地呈球形.

现在考虑月球引力的影响, 如图 2.9 所示, 地月系统在引力的相互作用下围绕着共同的质心 O 旋转. 在地心参考系中各地海水所受月球的有效引力是“真实的引力”和地心的向心加速度造成的“惯性离心力”之和. 这有效引力的分布就像图

2.8(b) 所示那样,把海水沿地月联线方向拉长而成为一个椭球.

在图 2.9 中, c 和 c' 分别是地球和月球的质心, O 是它们共同的质心, P 是某一滴质量为 Δm 的海水, $r = \alpha c'$, $r' = \rho c'$, $R = cp$, 海水 Δm 受月球的吸引力为

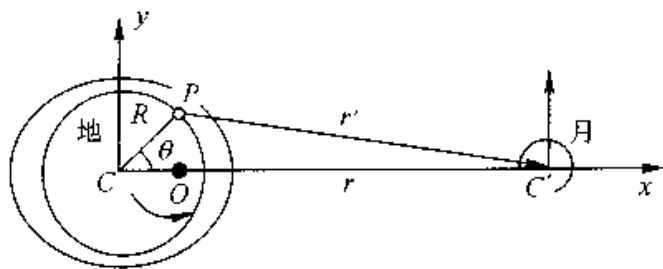


图 2.9 月球对地面海水的引潮力

$$f = G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r'^2} e_{r'} = G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r'^3} r'$$

在地心参考系中,地球上各点的惯性力都相同,而在地心处惯性力恰好与引力平衡.因此,任何质量的惯性力等于把它放在地心处时所受引力的负值

$$f_i = -G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^2} e_r = -G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^3} r$$

f 与 f_i 合成为引潮力 $f_{\text{潮}}$:

$$f_{\text{潮}} = f + f_i = G \Delta m M_{\text{月}} \left(\frac{r'}{r'^3} - \frac{r}{r^3} \right)$$

由图可看出,

$$r' = r - R$$

$$r' = |r - R| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

故

$$f_{\text{潮}} = G \Delta m M_{\text{月}} \left(\frac{r - R}{|r - R|^3} - \frac{r}{r^3} \right)$$

取直角坐标系的 x 轴沿 cc' , y 轴与之垂直,如图 2.7 所示.则

$$(r - R)_x = r - R \cos \theta$$

$$(r - R)_y = R \sin \theta$$

及

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$$

所以

$$\begin{aligned} (f_{\text{潮}})_x &= G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^2} \left[\frac{1 - \frac{R}{r} \cos \theta}{\left(1 - \frac{2R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1 \right] \\ &\approx G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^2} \left[1 - \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{3R}{r} \cos \theta - 1 \right] \\ &= 2G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^3} R \cos \theta \end{aligned}$$

类似地

$$(f_{\text{潮}})_y = -G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^2} \frac{R}{r} \sin\theta = -G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^3} R \sin\theta$$

在以上两式中, R 为地球的半径, r 为地月之间的距离. 归纳以上结果, 得到引潮力公式的分量形式为

$$\left. \begin{aligned} (f_{\text{潮}})_x &= 2G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^3} R \cos\theta \\ (f_{\text{潮}})_y &= -G \frac{\Delta m M_{\text{月}}}{r^3} R \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

引潮力在地表上的分布如图 2.10 所示, 在 $\theta = 0$ 和 π 处(即离月球最近和最远处), 引潮力是背离地心的, 在这些地方形成海水的高峰; 在 $\theta = \pm \pi/2$ 处, 引潮力指向地心, 形成海水的低谷, 随着地球的自转, 一昼夜之间有两个高峰和两个低谷扫过地球表面每一个地方, 形成两次高潮和两次低潮.

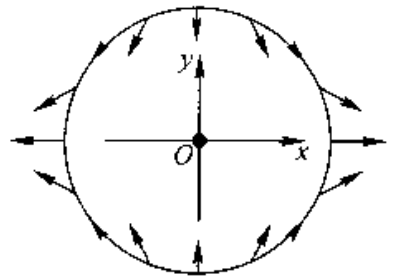


图 2.10 引潮力在地表的分布

式(2-16)同样适用于太阳, 只是其中的 $M_{\text{月}}$ 应代之以太阳的质量 $M_{\text{日}}$, r 表示日地间的距离, 故月潮与日潮大小之比为

$$\begin{aligned} \frac{(f_{\text{潮}})_{\text{月}}}{(f_{\text{潮}})_{\text{日}}} &= \frac{M_{\text{月}}}{M_{\text{日}}} \left(\frac{r_{\text{日}}}{r_{\text{月}}} \right)^3 \\ &= \frac{7.35 \times 10^{22} \text{ kg}}{1.99 \times 10^{30} \text{ kg}} \left(\frac{1.50 \times 10^8 \text{ km}}{3.84 \times 10^5 \text{ km}} \right)^3 \\ &\approx 2.20 \end{aligned} \quad (2-17)$$

即月球的引潮力是太阳的二倍多, 这就解释了为什么月球(而不是太阳)对潮汐起着主要作用.

日、月引潮力的效果是线性叠加的, 合成的结果与日、月的相对方位有关. 在朔日和望日, 月球、太阳和地球几乎在同一直线上, 见图 2.11(a), 太阴潮和太阳潮彼此相加, 形成每月的两次大潮, 上弦和下弦时, 见图 2.11(b), 太阴潮被太阳潮抵消了一部分, 形成每月里的小潮.

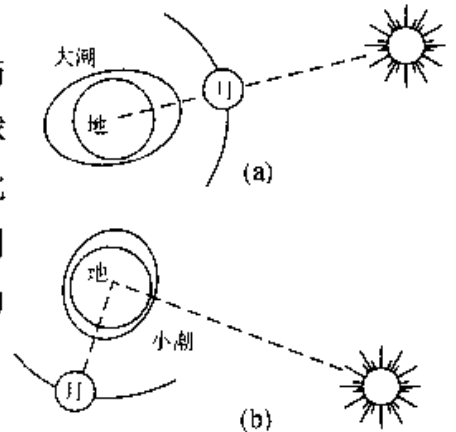


图 2.11 大潮与小潮

引潮力在天文学上有重要作用.

§ 2.4 混沌与牛顿定律的内在随机性

一、牛顿第二定律与因果律

1. 机械决定论

牛顿第二定律作为质点力学的核心定律,定量地揭示出物体所受的力与物体本身机械运动状态发生变化之间的因果关系

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a}$$

这个关系表明,量度物体机械运动状态的动量 $m\mathbf{v}$ 随时间的变化率 $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a}$ 是外力 \mathbf{F} 的作用效果,即 \mathbf{a} 是果, \mathbf{F} 是因,动因的作用由效果来体现.

由于力只是改变物体运动状态的原因,即只决定运动状态的变化,故要确定运动规律必须有初始条件,即要知道运动过程中某时刻的运动状态,包括位置和速度.由数学角度说,由力的作用规律和牛顿第二定律建立起物体的运动微分方程,只有加上初始条件才构成定解问题,得到惟一确定的解.这样,由某时刻已知的运动状态确定了该时刻的力,二者的联合就决定了下一刻的运动状态,而此运动状态又确定了这一时刻的力,二者的联合又决定了下一时刻的运动状态,如此延续下去就一环扣一环地确定了运动的全过程.

综上所述,只要知道了力和初始条件,由牛顿定律就可以惟一确定力学事件的全过程,无论是过去还是未来.这就是著名的力学“决定论”,亦称“机械决定论”.按照这种理论,物体在任何时刻的运动状态是完全确定的,当初始条件有一微小变化时,运动轨道的变化不会太大,即结果对初值不敏感.这类运动是可以“重现”、可以“预报”的,比如,行星的运动可以预报,日蚀、月蚀与潮汐一样可以预见,对航天飞机和导弹的运行可以勾划出准确的历程.著名的法国数学家和天体力学家拉普拉斯曾说:“我们应当把宇宙的现状看作它先前状态的结果以及它的后继状态的原因.假定在某一时刻,有一种智慧能够把握自然界所有的力以及组成自然界的从庞大的物体到最微小的原子的运动全部囊括于同样的公式中,对于它来说,没有什么事情是不确定的,将来就像过去一样,都呈现在他的眼前.”

2. 随机性理论

近 20—30 年以来,随着非线性科学的研究进展,持续了近 300 年的牛顿力学的

“决定论”被推翻,取而代之的是“随机性理论”。

随机性理论亦称**混沌理论**,是指这样的理论:当系统初始条件(即边界条件)确定后,理论只能对系统以后的运动做概率的统计性描写,不能预测确定的个别状态。

实际上,牛顿力学所能描写的力学系统多是非线性系统,即系统的运动微分方程为非线性微分方程(含未知函数或其导数的二次方以上的项),这多是因受力情况造成的,例如,介质阻力一般都是与运动物体相对于介质的速率的二次以上的方次成正比的,数学理论表明,对于多数非线性微分方程,解对初始条件的依赖性极强,对初始条件的变化非常敏感,初始条件的极细微变化,在短时间内的解还可以与确定性理论的解相接近;但长时间的过程,就会有各种可能的、很大的偏离,因而使求解的结果成为不可预测的,初始条件对解的影响表现为统计规律,这样,确定的方程的短期解可以是确定的或近似确定的;而要使解长期确定就必须给出无限精确的初值,这在理论上可以做到,但是在实际问题中,却是无论如何提高测量精度也做不到的,所以,对大多数可以用牛顿力学描述的非线性系统,其长期的运动状态是随机的,而不是确定的,这种无规则运动状态被称为“混沌”(意即“迷蒙一片”),从而随机性理论也称混沌理论。

随机性的一个最简单的例子是掷硬币,如果过程确实是随机的,投掷过程中没有任何人为的因素存在,则投掷的可能事件只有两种:正面或反面,它们都可以在下次投掷时发生,其出现的概率各占50%,这种不确定性称为外在随机性,外在随机性是由于受到外界诸多因素的影响而产生的,且人们对其中某些因素的作用,甚至因素的本身是什么也不知道,这种特性并不是动力系统本身所固有的,外在随机性表示在任意时刻,即使是很短时间内,其微观状态也是无法确定的,因而是不可预报的,只能对系统的状态进行统计描述,给出它的概率分布。

混沌现象的随机性并非这种外在随机性,而是**内在随机性**,内在随机性是动力系统本身所固有的,并不是由于外界的干扰所造成,它与外在随机性不同,是在完全确定的微分方程中,不需要附加任何随机因素的情况下,该确定系统按确定的规律在相当长时间的演化后,系统不再具有确定性,而呈现的一种“貌似混乱”的状态。

综上所述,“混沌”是决定论系统中的内在随机行为,可以给混沌一个操作定义:如果作为系统基础的动力学是决定论的,在未引进任何外来随机因素的情况下,个别结果敏感地依赖初始条件,从而其长期行为具有不可预测性,而且它的某些全局特征与初始条件无关,我们就认为系统处于混沌状态。

二、混沌现象举例

混沌现象随处可见,但因为我们对它了解太少,所以往往视而不见,忽略了它的存在.要充分认识混沌现象的确是一件较困难的事.但容易理解或比较容易理解的混沌现象的例子还是可以举出很多的.比如蝴蝶效应、湍流、三体问题、昆虫繁衍、机床切削金属、打印机机头因冲击而引起的混沌振动等.另外,正常的脑电波则近乎随机讯号,癫痫病患者发病时的脑电波呈现明显的周期性,而其脑电图曲线代表的就是典型的混沌现象.单摆是我们熟知的确定性运动典型,但当角度大到一定程度并有驱动力和阻力时也居然能够进入混沌状态.而在政治、经济、战争、教育等社会科学各个领域也发现了许多混沌现象.

下面列举两个典型的混沌现象实例.

1. 蝴蝶效应

1961年,美国气象学家洛伦茨(E. Lorenz)根据他导出的12个气象演变的动力学方程,利用一台老式的真空管计算机,按照初始条件进行计算,探讨准确进行长期天气预报的可能性.

有一次,已算得了一个解,他想知道此解的长期行为,为节省时间,他不再从头算起,而是把记录下来的中间数据当作初始值输入.他期望计算机重复给出上次计算的后半段结果,然后接下去进行新的计算.却未料到,经过一段重复过程后,计算就逐渐偏离了上次的结果.

他决定仔细看一下两次原本十分相同的气候流程如何相差愈来愈大.他先把第一次输出的波纹打印在一张透明胶片上,又把第二次输出的波纹打印在第二张透明胶片

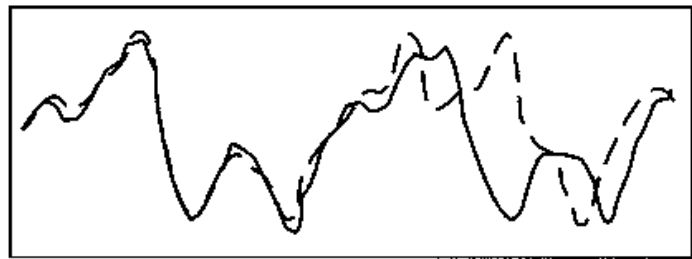


图 2.12 长期的天气预报是不可能的

上,然后把两张透明胶片重叠,这样来观看此波纹如何由前段的重合变到后来的逐渐分离,如图 2.12 所示.开始有两个隆起部分相重叠,后来其中一条波线开始滞后一根头发丝般的距离,随着时间的推移,当两条波线到达下一个隆峰时,完全走了样,而在第三、第四个隆峰时,已根本无任何相似之处,仿佛是完全不相干的、随机选取的两类气候了.

洛伦茨很快就意识到问题出在他输入的数据上, 计算机存储的是 6 位小数: 0.506 127, 而打印出来的是 3 位: 0.506. 他第二次输入时用了后者, 以为千分之几的误差无关紧要. 按传统的思维方式考虑, 也确实该这样. 洛伦茨的计算机中装的是经典的程序, 使用的是纯粹决定性的方程组. 给定一个特定的起点, 每次这个气象便严格地由这个特定的起点按同一方式展开. 一旦给定稍有差异的起点, 这气象便应当按稍有差异的方式展开. 一个小小的数字误差, 仿佛是吹过一阵微风. 显然, 一阵微风不会造成什么大范围的气候后果. 因为在引起这些后果之前, 它们已经消失了, 或相互抵消了. 然而, 今天的情形不同了, 在洛伦茨这一特定的方程组中, 小的误差带来了巨大的后果差异.

洛伦茨还认识到, 他的方程是非线性的, 这些方程并不具有传统数学想象的那种行为, 而是对初值高度敏感的. 他为这种现象取了一个名字——“蝴蝶效应”. 意思是说, 一只蝴蝶今天拍打一下翅膀, 使大气的状态产生微小的改变, 经过一段时间 (比如一个月), 另一个大洲的一场龙卷风却发生了. 洛伦茨用这个比喻的意思是说, 一个小地区的小气候会影响全球的大气候, 本来是细微的事件, 经过曲折的历程会在其它大洲上空形成“山雨欲来风满楼”的景象.

洛伦茨看出了气候不能精确重演与预报者无能为力之间必然存在着一种联系, 这就是一个物理系统的非周期行为与它的不可预见性之间的联系. 洛伦茨的结论是, 长期的天气预报是不可能的.

2. 昆虫繁衍

昆虫繁衍是一个有代表性的混沌现象. 假定有某种昆虫, 在不存在世代交叠的情况下, 即每年夏天成虫产卵后全部死亡, 第二年春天每个虫卵孵化为虫. 令 N_i 代表第 i 代种群的总数, N_0 代表环境能支撑和供养种群数量的最大限制, 则 $x_i = N_i/N_0$ 为约化的种群数量. 若无环境的限制, 子代种群数量 x_{i+1} 将正比于亲代的种群数量 x_i . 如果昆虫的食物供应是固定的, 昆虫若繁殖得太多, 便面临着食物短缺, 繁殖率必然下降. 为了反映出环境的限制, 我们假定 x_{i+1} 还正比于 $(1 - x_i)$, 于是得到一个非线性迭代方程

$$x_{i+1} = \lambda x_i (1 - x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2-18)$$

这个迭代关系式就是描述昆虫繁衍的非线性方程——虫口方程. 式中控制参数 λ 的取值范围为 $(0, 4]$, 变量 x_i 的取值范围 $[0, 1]$.

虫口方程的形式很简单, 但其内容却十分丰富.

1976 年,美国生物学家罗伯特·梅依据虫口方程,运用计算机进行数据计算,研究了各种生物系统变化的规律,从各种流行病的记录和某些动物种群数量涨落的记载中,寻求产生混沌的机制,发现了通过倍周期分岔走向混沌的现象.

下面讨论在 λ 不变时,虫口方程(2-18)的解对初值的依赖性.设 λ 取定值 $\lambda = 4$,给定不同的初值 x_0 进行迭代运算.所谓迭代就是重复的意思.表 2-1 列出了给定 3 个数值($x_0 = 0.1, x_0 = 0.100\ 0001, x_0 = 0.100\ 00001$),经过 52 次迭代运算的结果.

表 2-1 对初值的敏感性

i	$x_{i+1} = 4x_i(1-x_i)$		
	$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.100\ 000\ 1$	$x_0 = 0.100\ 000\ 01$
0	$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.100\ 000\ 1$	$x_0 = 0.100\ 000\ 01$
1	0.36	0.360 000 032 0	0.360 000 003 2
2	0.921 6	0.921 600 358 4	0.921 600 035 8
...
10	0.147 836 559 9	0.147 715 428 1	0.147 824 444 9
...
50	0.277 569 081 0	0.973 249 588 2	0.435 057 399 7
51	0.802 094 386 2	0.145 139 309 1	0.983 129 834 6
52	0.634 955 927 4	0.373 177 253 6	0.066 342 251 5

从表中可以看出,给定的 3 个初值差别如此之小,仅在小数点后第 7 为位、第 8 位上有差异,前几次迭代结果看不出有什么差别,迭代至 10 次后所得结果差别也不显著.经过 50 次迭代后看出结果有些出乎意料,譬如 50 次与 51 次结果颇有惊人之处,第 52 次结果已不可思议,其值出现飘忽不定,似有随机性.真有“差之毫厘,失之千里”之感.

从物理学角度说,物理量的测量,或换言之,人们对初值的认识总是有误差的,而在非线性动力系统中状态的演化对初值敏感依赖.

在研究果木产量及家畜数量变化时,虫口方程也大致适用,在研究地球上日益严重的人口迅速增长问题时,虫口方程也有重要的借鉴作用.

由以上两个实例分析可以看出,混沌是决定论系统中的内在随机行为,长期行为对初值敏感依赖,其根源在于系统的非线性.

§ 2.5 混沌的演化途径及混沌现象的本质

通过前一节的讨论,我们对混沌现象有了一定的认识.必须指出,不能把混沌现象等同于混乱和无序,混沌是有其演化途径并遵循一定规律的.

这一节首先讨论非线性系统是怎样通过一系列倍周期分岔进入混沌状态的,然后说明混沌现象的特性及本质.

一、由倍周期分岔通往混沌的道路

非线性系统的动力学方程是一个非线性微分方程,式中包含了非线性项,用解析方法求解这类方程是及其困难的,通常是把它们化为代数方程,在给定参量和初始条件后进行数值计算.在这类代数方程中最简单、最典型的的就是前述的虫口方程:

$$x_{i+1} = \lambda x_i(1 - x_i), \quad x_i \in [0, 1] \quad (2-19)$$

借助对这一非线性迭代方程进行迭代计算,我们可以清楚地看到非线性系统通过倍周期分岔进入混沌状态的途径.

迭代过程可以直观地用图解来表示.图 2.13 中的水平轴表示 x , 垂直轴表示 x_{i+1} , 抛物线表示(2-19)式右端的迭代函数, 45° 线表示 $x_{i+1} = x_i$ 的关系.由水平轴上的初始点 $R(x_0, 0)$ 作竖直线,找到与抛物线的交点 $A(x_0, x_1)$, A 的纵坐标就是 x_1 .由点 $A(x_0, x_1)$ 作水平直线,求它与 45° 线的交点 $B(x_1, x_1)$, 经 B 点再作竖直线,求得与抛物线的交点 $C(x_1, x_2)$, 这样就得到 x_2 了.仿此做法可得到所有迭代点.

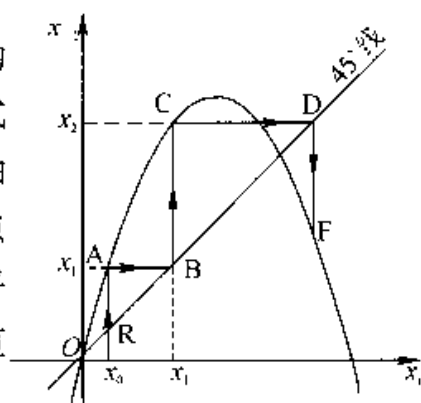


图 2.13 虫口效应迭代过程图解表示

从任何初始值出发迭代时,一般有个暂态过程.但我们关心的不是暂态过程,而是它所趋向的终态集.终态集的情况与控制参数 λ 有很大关系.增加 λ 值就意味着增加系统的非线性的程度.改变 λ 值,不仅仅改变了终态的量,而且也改变了终态的质.它所影响的不仅仅是终态所包含的定态的个数和大小,而且也影响到终态究竟会不会达到稳定.

当 $1 < \lambda < 3$ 时,迭代结果的归宿是一个确定值,趋于一个不动点,即抛物线与 45° 线的交点,这相当于系统处于一个稳定态,如图 2.14(a) 所示.此值与 λ 有关,且

与 λ 值有一一对应关系. 当 $\lambda = 2.4$ 时, $x_i = x_{i-1} = 7/12$. 迭代的结果为一个不动点的情况, 其周期为 1, 这表示从 x_i 出发, 迭代一次就回到 x_i .

当 $3 < \lambda < 3.449$ 时, 迭代的终态在一个正方形上循环, 亦即 x_i 在两个值之间往复跳跃, 与一个 λ 值对应将有两个 x_i 值, 即其归宿轮流取两个值, 如图 2.14(b) 所示. 当 $\lambda = 3.2$ 时, 此值为 $0.5130 \rightleftharpoons 0.7995$, $x_{i-2} = x_i$, 周期为 2, 表示从 x_i 出发, 迭代二次后回到 x_i . 所以, 从图 2.14(a) 到图 2.14(b) 中间发生了一个倍周期分岔, 一个稳定态分裂成为两种状态, 而系统便在两个交替变动的值之间来回振荡.

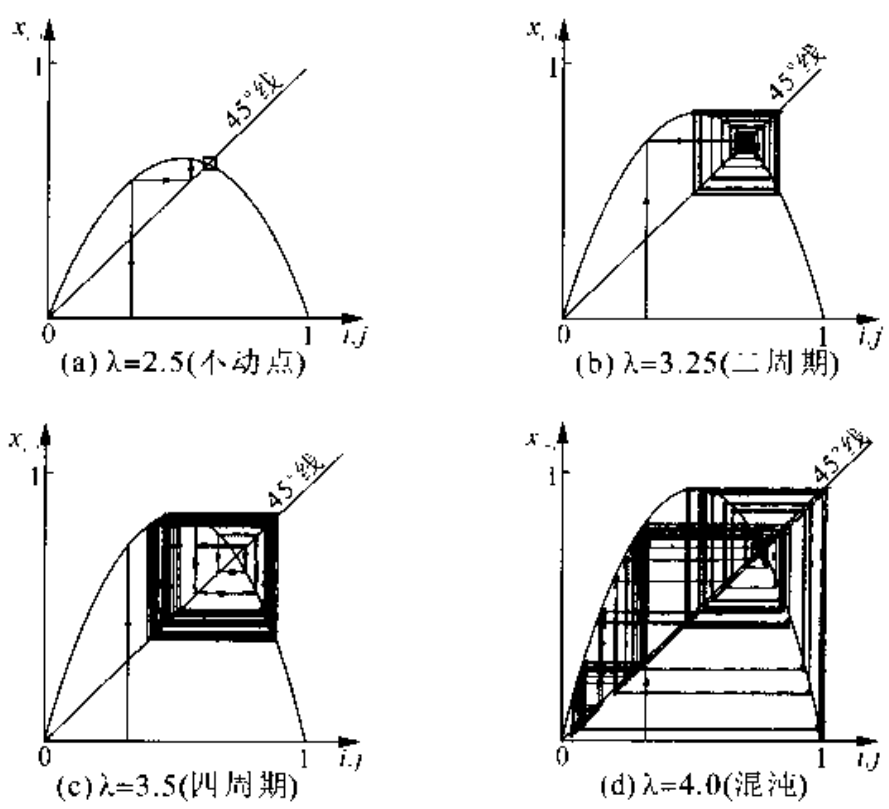
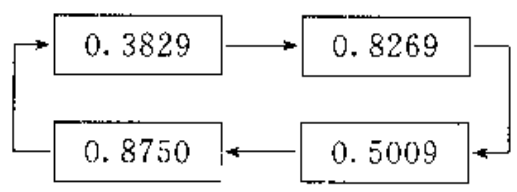


图 2.14 虫口方程的迭代图解

当 $3.449 < \lambda < 3.544$ 时, 最终 x_i 在四个值之间循环跳跃, 如图 2.14(c) 所示. $x_{i+4} = x_i$, 即终态集是个四周期解, 表示从 x_i 出发, 迭代四次后回到 x_i . 所以, 从图 2.14(b) 到图 2.14(c), 中间又发生了一个倍周期分岔, 两种状态分裂成四种状态, 而系统便在四个交替变动的值间来回振荡. 当 $\lambda = 3.5$ 时, 四个值为



当 $3.569 < \lambda < 4$ 时, 周期变为 ∞ , 最后归宿可取无穷多的各种不同值, 即出现混沌现象. 图 2.14(d) 表示 $\lambda = 4.0$ 时的具体迭代过程, 此时系统已进入混沌, 没有稳定的周期轨道.

综合以上讨论可知, 第一次分岔开始发生在 $\lambda = 3$ 的地方, 其后发生一个无穷系列的倍周期分岔, 每次开始分岔的参数值为 $3.449, 3.544, 3.564, \dots$, 其间间隔越来越小, 到了极限参数值 $\lambda = 3.569$ 的地方进入混沌区. 在 λ 从 3.569 到 4 的参数范围内, 情况是极为复杂的, 这里基本上是混沌区, 如图 2.15 所示. 此分岔图是方程(2-19) 依赖控制参量 λ 所得到的不同演化归宿的图像集合.

二、混沌现象的特性及本质

1. 混沌现象的特性

(1) 在混沌区中, 混沌系统对初值的依赖具有敏感性.

对于混沌的这一特性, 通过蝴蝶效应和虫口效应的介绍已经有了相当的感性认识. 而通过迭代则可使这个特性更加一目了然. 初值的微小差异, 经过若干次迭代后就会“差之毫厘, 失之千里”了. 其长期行为具有一种随机的特征, 但这种随机性与概率统计中的随机性不同, 它是一种内在的随机行为.

(2) 混沌区存在周期窗口是混沌现象的又一特性.

即便是在混沌区也并非一片混乱, 混沌区中还有无数周期窗口. 如对方程

$$x_{i+1} = 3.828x_i(1-x_i)$$

迭代结果为 3 周期, “终态”为 $x_1 = 0.1599, x_2 = 0.5143, x_3 = 0.9563$. 而且对窗口放大后发现窗口中还有“结构”, 图 2.16(b) 是从图 2.16(a) 中取了一个 $3.847 \leq \lambda \leq 3.857$ 范围内的小窗口, 放大后的结果. 从图 2.16 可见, 小窗口中又存在倍周期分岔进入小的混沌区, 在小混沌区中又有小的窗口等等. 混沌区看似混乱却又乱得“精致”, 乱得“耐人寻味”. 说得专业一些就是: 混沌区为一个无限嵌套的自相似结构.

所谓无限嵌套的自相似结构, 说得通俗一些, 即局部与整体相似, 对局部放大后的形象与整体形象相同或近似相同.

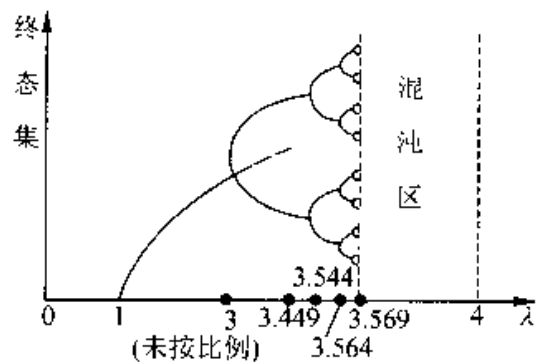


图 2.15 倍周期分岔示意图

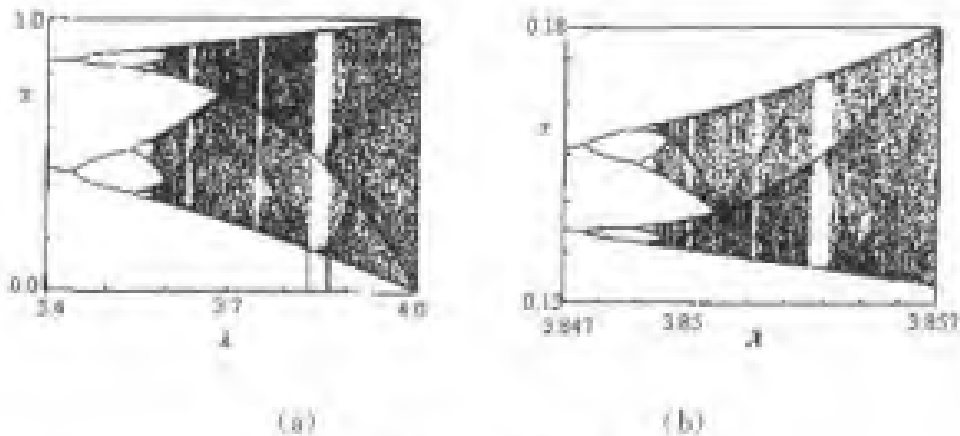


图 2.14 混沌区中倍周期窗口及放大

具有无限嵌套的自相似结构是混沌现象的普遍特性。

2. 混沌现象的本质

下面对混沌现象的本质做初步概括：

(1) 混沌是过程的科学、演化的科学，而不是状态的科学，变化是混沌的本性。

系统运动状态随着时间的推移不断变化。当控制参量 λ 由小到大变化时，系统由稳定有序逐渐失稳，开始分岔，随着分岔按几何级数的不断增长，系统由有序到无序。当控制参量 λ 达到一个临界值时系统进入混沌区。当 λ 再缓慢增大时又会遇到一个个的周期窗口，一个个混沌区，当 λ 不断减少时系统又会由混沌逐渐向有序演化。

比如，昆虫数量总是在零到最大限额之间不断变化，而且数量又年年不同；气候则总是在好天气与坏天气之间反反复复，但又没有哪两天有完全相同的天气。这就如同世上没有两片完全相同的树叶，没有完全相同的指纹一样。

另外，由虫口方程迭代可见，只有在远离平衡的条件下，混沌非线性系统才能演化达到混沌态。

(2) 混沌现象只能出现在非线性系统，而不能出现在线性系统中。

非线性方程与线性方程不同，对后者叠加原理成立，整体等于部分之和；对于前者，叠加原理不成立，整体可以大于部分之和。在蝴蝶效应和昆虫繁衍问题中，我们涉及的都是非线性方程。在这些方程（如虫口方程）中没有外加随机变量，即不存在产生随机性的外部原因，因此牛顿力学的随机性又是本身固有的，是内在随机性。而牛顿力学的“内在随机性”的根源就在于其动力学方程中有非线性项存在，这种作用是产生混沌现象复杂性的本质原因。

可见，非线性是关键，内在随机性也并非牛顿力学独有，其他非线性过程同样会

进入混沌.

(3) 混沌不等同于混乱.

混沌是一种确定论系统中出现的貌似不规则的有序运动. 这种有序不同于我们所熟悉的简单有序、线性有序. 混沌中的有序, 是乱中有序, 是有序与无序的结合, 是非线性序, 混沌序. 即便说到混乱, 它也是一种确定性的混乱, 形式的混乱, 宏观上的混乱.

在混沌区似乎混乱, 但也乱得有规律. 混沌窗口中无限嵌套的自相似结构的存
在, 不仅说明混沌有序, 而且说明这是一种复杂有序, 高级有序.

三、混沌现象的应用

自然界本是一个统一的整体, 但自然科学中有确定论和概率论两套描述体系. 牛顿以来的科学传统比较推崇确定论体系, 而把概率论作为补充. 其实, 完全的确定论和纯粹的概率论都是抽象后理想化的极限情况. 当混沌运动不显著时可用确定论来描述; 当混沌运动剧烈时就要考虑运用概率论的可能性了. 真实的自然界实际上介于二者之间. 因为世界本质上是非线性的, 线性化只能是非线性的一种合理近似.

混沌现象的出现, 一方面预示着人们认识世界的预测能力将受到根本性的限制, 另一方面则又大大转变了人们的传统观念, 向人们提供了研究问题的新思路、新方法. 过去人们往往认为搜集到的许多复杂的随机信息是一种偶然现象的反映, 甚至认为是“噪声”, 是实验的失败, 因而弃置一旁, 不予理睬. 现在, 人们意识到以前可能错了, 这些信息里有相当一部分或许可以归入混沌一类, 而可以另辟蹊径, 用混沌的方法去进行研究, 或者能从混沌中找到出路, 甚至取得令人意想不到的结果. 另外, 鉴于混沌的复杂性, 要用好它往往也不是一件轻而易举的事, 对此我们应当认真研究.

对混沌现象的研究有助于我们从更接近实际的角度去认识世界, 探索自然界的本质.

自然界创造了各种生物以适应各种自然环境, 包括灾难性的气候突变. 由于自然环境的演变不可预测, 生物种族的产生和发展不可能有一个预先安排好的确定程序. 自然界在这里利用了混乱来对抗不可预测的环境. 它利用无序的突变产生出各种各样的生命形式来适应自然选择的需要. 自然选择好像一种反馈, 适者生存并得到发展, 不适者被淘汰灭绝. 可以说, 生物进化就是具有反馈的混沌.

人的自体免疫反应也是有反馈的混沌. 人体的这种反应是要对付各种各样的微生物病菌和病毒. 一种理论认为, 如果为此要建立一个确定的程序, 那就不但要把现有的各种病菌和病毒都编入打击目录, 而且还要列上将来可能出现的病菌和病毒的名字. 这种包揽无余的确定程序是不可能建立的. 自然界采取了以火攻火的办法, 利用混沌为人体设计了一种十分经济的程序. 在任何一种病菌或病毒入侵后, 体内的生产器官就开始制造形状各种各样的分子, 并把它们运送到病菌入侵处. 当发现某一号分子能完全包围入侵者时, 就向生产器官发出一个反馈信息. 于是生产器官就立即停止生产其它型号分子, 而只大量生产这种对症的特定型号分子. 所有入侵者很快都被这种分子所包围, 并通过循环系统把它们带到排泄器官(如肠、肾)而被排出体外. 最后, 生产器官被通知关闭, 一切又恢复正常.

在医学研究中, 人们发现猝死、癫痫、精神分裂症等疾病的根源可能就是混沌. 在神经生理测试中, 已发现正常人的脑电波是混沌的, 而神经病患者的脑电波往往简单有序.

在流体动力学领域还有一种常见的混沌现象. 在管道内流体的流速超过一定值时, 或是在液流或气流中的障碍物后面, 都会出现十分紊乱的流动. 这种流动叫湍流(或涡流). 这种湍流是流体动力学研究的重要问题, 具有很大的实际意义, 但至今没有比较满意的理论说明. 混沌的发现给这方面的研究提供了可能是非常重要的或必要的手段.

目前, 混沌理论已广泛应用于物理学、天文学、化学、生物学、医学、气象学等自然科学学科. 同时也已经开始应用于激光、超导等众多高科技领域, 还创建了混沌科学等分支学科, 甚至已经扩展到社会科学的众多方面. 比如股市行情的风云变幻, 市场经济的潮张潮落就或多或少地有着蝴蝶效应的味道. 在这些方面应用混沌理论相信是很有前途的.

思 考 题

2-1 有人说:“人推动了车是因为人推车的力大于车反推人的力.”这话对吗?为什么?

2-2 在略去空气阻力的情况下, 轻重不相等的两个物体在地球表面附近从同

一高处自由下落. 亚里士多德认为:“重的物体应比轻的物体先落地”. 对于亚里士多德的这一观点, 你觉得怎样?

2-3 摩擦力是否一定阻碍物体的运动?

2-4 将一质量略去不计的轻绳, 跨过无摩擦的定滑轮, 一只猴子抓住绳的一端, 绳的另一端悬挂一个质量和高度均与猴子相等的镜子. 开始时, 猴子与镜子在同一水平面上. 猴子为了不看到镜中的猴像, 它作了下面三项尝试:

- (1) 向上爬;
- (2) 向下爬;
- (3) 松开绳子自由下落.

这样猴子是否就看不到它在镜中的像了呢?

2-5 试回答下列问题:

- (1) 物体受到几个力的作用时, 是否一定产生加速度?
- (2) 若物体的速度很大, 是否意味着其它物体对它作用的合外力也一定很大?
- (3) 物体运动的方向与合外力的方向总是相同的, 此结论是否正确?
- (4) 物体运动时, 如果它的速率不改变, 它所受的合外力是否一定为零?

2-6 绳的一端系着一个金属小球, 以手握其另一端使其作圆周运动.

- (1) 当每秒的转数相同时, 长的绳子容易断还是短的绳子容易断? 为什么?
- (2) 当小球运动的线速度相同时, 长的绳子容易断还是短的绳子容易断? 为什么?

2-7 用绳子系一物体, 使其在竖直平面内作圆周运动, 当物体达到最高点时,

- (1) 有人说:“这时物体受到三个力: 重力、绳子的拉力及向心力”;
- (2) 又有人说:“这三个力的方向都是向下的, 但物体不下落, 可见物体还受到一个方向向上的离心力与这些力平衡着”;

这两种说法对吗? 为什么?

2-8 如图 2.17 所示, 一个悬挂着的物体在水平面上作匀速圆周运动, 有人在重力 mg 的方向上求合力, 从而写出

$$T \cos \theta - mg = 0$$

另有人沿绳子拉力 T 的方向求合力, 写出

$$T - mg \cos \theta = 0$$

显然两者不能同时成立, 试指出哪一个式子是错误的, 为什么?

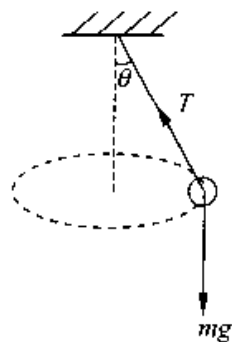


图 2.17

2-9 惯性力是怎样产生的?它有没有反作用力?为什么要引入惯性力?惯性力的方向和数值取决于什么因素?

2-10 试举出经典力学中典型确定性的三个实例

2-11 试举出三个混沌现象实例.

2-12 有一个故事:从前有座山,山上有座庙,庙里有个老和尚给小和尚讲故事;从前有座山,……请大家充分发挥想像力,举更多的例子说明混沌现象具有无限嵌套的自相似结构的特性.

2-13 试用混沌的理论解释以下问题:

(1) 足球比赛与田径比赛相比较,为什么足球比赛更有可观看性和吸引力?

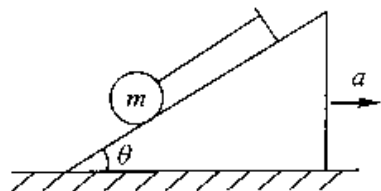
(2) 对于一些社会现象,如经济、股市、战争与和平等,用混沌理论看,有何联想?

习 题

2-1 一木块能在与水平面成 θ 角的斜面上匀速下滑.若使它以速率 v_0 沿此斜面向上滑动,试证明它能沿该斜面向上滑动的距离为 $v_0^2/(4g\sin\theta)$.

2-2 在一水平直路上,一辆车速 $v = 90\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的汽车的刹车距离为 $s = 35\text{m}$.如果路面相同,只是有 $1:10$ 的下降斜度,这辆汽车的刹车距离将变为多少?

2-3 如图 2.18 所示,质量 $m = 0.50\text{kg}$ 的小球挂在倾角 $\theta = 30^\circ$ 的光滑斜面上.



(1) 当斜面以加速度 $a = 2.0\text{m/s}^2$ 水平向右运动时,绳中的张力及小球对斜面的正压力各是多少?

(2) 当斜面的加速度至少为多大时,小球将脱离斜面?

图 2.18

2-4 在水平面上,一辆汽车以速率 v 行驶,当汽车与前面一堵墙相距为 d 时,司机才发现自己必须制动或拐弯.设车辆与地面之间的静摩擦因数为 μ .问若司机制动停车(不拐弯),他需要的最小距离 d_1 为多少?若他不制动而作 90° 拐弯(作圆弧行驶),他需要的最小距离 d_2 又有多少?哪种办法最安全?

2-5 月球的质量是地球的 $\frac{1}{81}$,月球的半径为地球半径的 $\frac{2}{11}$.不计自转的影响,试计算地球上体重 600N 的人,在月球上时体重为多少?

2-6 一枚质量为 $3.03 \times 10^3\text{kg}$ 的火箭,放在与地面成 58.0° 倾角的发射架上,

点火后发动机以恒力 61.2 kN 作用于火箭,火箭轨迹始终与地面成 58.0° 的夹角.飞行 48.0 s 后关闭发动机,计算此时火箭的高度及距发射点的距离(忽略燃料质量和空气阻力).

2-7 在光滑水平面上固定了一个半径为 R 的圆环,一个质量为 m 的物体 A 以初速度 v_0 靠圆环内壁作圆周运动,物体与环壁的摩擦因数为 μ ,试求物体 A 任意时刻的速率 v .

2-8 光滑的水平桌面上放置一半径为 R 的固定圆环,物体紧贴环的内侧作圆周运动,其摩擦因数为 μ .开始时物体的速率为 v_0 ,求:(1) t 时刻物体的速率;(2) 当物体速率从 v_0 减少到 $\frac{1}{2}v_0$ 时,物体所经历的时间及经过的路程.

2-9 一质量为 10 kg 的质点在力 $F = 120t + 40 \text{ N}$ 作用下,沿 x 轴作直线运动.在 $t = 0$ 时,质点位于 $x_0 = 5.0 \text{ m}$ 处,其速度 $v_0 = 6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.求质点在任意时刻的速度和位置.

2-10 质量为 m 的质点在外力 F 的作用下沿 x 轴运动,已知 $t = 0$ 时质点位于原点处,且初始速度为零,力 F 随距离线性地减小, $x = 0$ 时, $F = F_0$; $x = L$ 时, $F = 0$.试求质点在 $x = L$ 处的速率.

2-11 轻型飞机连同驾驶员的总质量为 $1.0 \times 10^3 \text{ kg}$.飞机以 $55.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率在水平跑道上着陆后,驾驶员开始制动.若阻力与时间成正比,比例系数 $\alpha = 5.0 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$.求:(1) 10 s 后飞机的速率;(2) 飞机着陆后 10 s 内滑行的距离.

2-12 一物体自地球表面以速率 v_0 竖直上抛.假定空气对物体阻力的值为 $F_r = kmv^2$,其中 m 为物体的质量, k 为常量.试求:(1) 该物体能上升的高度;(2) 物体返回地面时速度的值(设重力加速度为常量).

2-13 如图 2.19 所示,电梯相对地面以加速度 a 竖直向上运动,电梯中有一滑轮固定在电梯顶部,滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B ,且 $m_1 > m_2$.设滑轮的质量和滑轮与绳索间的摩擦均略去不计,若以电梯为参考系,求物体相对地面的加速度和绳的张力.

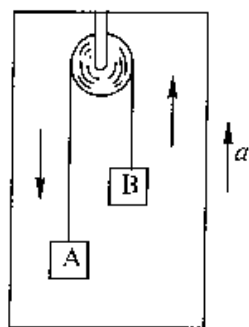


图 2.19

第3章 动量守恒定律和机械能守恒定律

从前一章的学习内容可知,牛顿运动定律反映了力的瞬时性.对一个物体而言,若已知其受力情况,则可通过牛顿运动定律求得加速度与时间的函数关系,再由初始条件即可确定该物体的速度和运动方程,物体在任一时刻的位置也相应确定,这正是研究机械运动问题的初衷.在实际中,我们不仅要研究力的瞬时效应,而且还要研究物体在力的持续作用下,力对物体所产生的累积效应.一种是力在时间上的累积及累积效果,另一种是力在空间上的累积及累积效果.

§ 3.1 质点的动量定理

一、力的冲量

任何力总在一段时间内作用.为描述力在一段时间间隔的累积作用,引入冲量概念.作用于物体上力的大小和方向通常是变化的,但在极短时间内,可认为力的大小方向都不变.用 Δt 表示极短的时间间隔, F 表示 Δt 中力的某一瞬时值,则力 F 与时间间隔 Δt 的乘积称为元冲量 ΔI ,即

$$\Delta I = F\Delta t \quad (3-1)$$

在从 t_0 至 t 的较长时间内,力通常不能再认为是恒矢量,于是把 $t-t_0$ 划分为许多很小的时间间隔 $\Delta_i t$,在任意的 $\Delta_i t$ 中将力 F_i 视作恒力,将力在各小时间间隔的元冲量求和,并取极限,得力 F 在 $t-t_0$ 时间间隔内的冲量 I ,

$$I = \lim_{\Delta_i t \rightarrow 0} \sum F_i \Delta_i t = \int_{t_0}^t F dt \quad (3-2)$$

即力的冲量等于 F 在所讨论的时间间隔内对时间的定积分.

冲量是质点在力的持续作用下在一段时间内的累积效应的量度.其量值取决于合力的大小及其持续作用时间的长短这两个因素.如果 F 是恒力,式(3-2)的积分容易计算,为

$$I = F(t-t_0) \quad (3-3)$$

即恒力的冲量等于它与它作用时间的乘积. 恒力冲量的方向与恒力的方向一致.

在国际单位制中, 冲量单位为 $\text{N} \cdot \text{s}$ (牛顿·秒), 冲量的量纲是 LMT^{-1} .

冲量是矢量, 元冲量的方向总是与力的方向相同; 至于在一段较长的时间内, 力的冲量等于这段时间内各无穷小时间间隔元冲量的矢量和, 因此, 力的冲量的方向决定于这段时间诸元冲量矢量和的方向, 不一定和某时刻力的方向相同.

二、质点的动量定理

力作用到质点上, 可以使质点的动量或速度发生变化. 在很多实际情况下, 我们需要考虑力按时间积累的效果. 这一效果可以直接地由牛顿第二定律得出. 为此可以把牛顿第二定律式(2-3a)写成微分形式, 即

$$Fdt = dp \quad (3-4)$$

式中乘积 Fdt 就表示 dt 时间内质点所受合外力的元冲量. 此式表明在 dt 时间内质点所受合外力的冲量等于在同一时间内质点的动量的增量. 这一关系叫做动量定理的微分形式. 实际上它是牛顿第二定律公式的数学变形.

如果将(3-4)式对 t_0 到 t 这段有限时间积分, 即考虑力在某段有限时间内的积累效果, 则有

$$\int_{t_0}^t Fdt = \int_{p_0}^p dp = p - p_0 \quad (3-5)$$

左侧积分表示在 t_0 到 t 这段时间内合外力的冲量 I , 所以(3-5)式可写成

$$I = p - p_0 \quad (3-6)$$

(3-5)式或(3-6)式是动量定理的积分形式, 它表明质点在 t_0 到 t 这段时间内所受的合外力的冲量等于质点在同一时间内的动量的增量. 后者是效果, 它取决于力在这段时间内的积累. 值得注意的是, 要产生同样的效果, 即同样的动量增量, 力大力小都可以: 力大, 时间可短些, 力小, 时间需长些. 只要力的时间积累即冲量一样, 就产生同样的动量增量.

虽然动量定理与牛顿第二定律一样, 都反映了质点运动状态的变化与力的作用的关系, 但是它们是有差别的. 牛顿第二定律所表示的是在力的作用下质点动量的瞬时变化规律, 而动量定理则表示在力的作用下质点动量的持续变化情形, 即在一段时间内对质点作用的积累效果.

动量定理在处理像碰撞和冲击一类问题时很方便. 因为在这类问题中, 作用于

物体上的力是作用时间极短、数值很大而且变化很快的一种力,称为冲力,这种力的大小与时间的关系大致可以表示为图 3.1 的情形.要确定冲力随时间变化的细节是困难的,因此无法或很难应用牛顿第二定律去处理这类问题.但我们可以从实验中测定物体在碰撞或冲击前后的动量,借助于动量定理来确定物体所受的冲量.而且还可以根据测定冲力作用于物体的时间,来估计冲力的平均值.尽管这个平均值不是冲力的确切描述,但在不少实际问题中,这样估计就足够了.

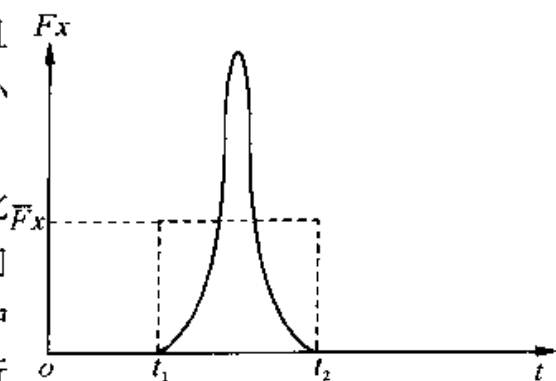


图 3.1 求解平均冲力

平均冲力 \bar{F} 定义为

$$\bar{F} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t F dt \quad (3-7)$$

应当指出的是,上述动量定理的表达式(3-4)式或(3-5)式都是矢量公式,所以在应用动量定理时可以直接用作图法,按几何关系求解,也可以用沿坐标轴的分量式求解.例如在直角坐标系中,沿各坐标轴的分量式是

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_{t_0}^t F_x dt = p_x - p_{x0} \\ I_y &= \int_{t_0}^t F_y dt = p_y - p_{y0} \\ I_z &= \int_{t_0}^t F_z dt = p_z - p_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

这些公式说明,质点所受合外力的冲量在某一方向上的分量等于质点的动量在该方向的分量的增量.

例 3-1 质量 $m = 1\text{kg}$ 的质点,从 C 点由静止开始沿半径 $R = 2\text{m}$ 的圆周运动,如图 3.2. 已知质点的运动弧长与时间的关系为 $S = \pi \frac{t^2}{2}$, 试求从 $t_1 = \sqrt{2}\text{s}$ 到 $t_2 = 2\text{s}$ 时间内作用于质点上合力的冲量.

解 从图 3.2(a) 可知,在 t_1, t_2 时刻,质点分别位于 A, B 两点.

由 $v = \frac{ds}{dt} = \pi t$ 知, v_1, v_2 分别为 $\sqrt{2}\pi$ 及 2π .

对应的两位置处动量的方向如图. 根据动量定理,在时间 $t_2 - t_1$ 内作用于质点

上的合力的冲量为

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \Delta(m\mathbf{v})$$

在直角坐标系中, x 方向上的单位矢量用 i 表示, y 方向上的单位矢量用 j 表示, 则 A 点处质点的动量为 $\mathbf{P}_1 = mv_1(-i)$, B 点处的动量为 $\mathbf{P}_2 = mv_2(-j)$, 则

$$\mathbf{I} = -m\pi(\sqrt{2}i + 2j)$$

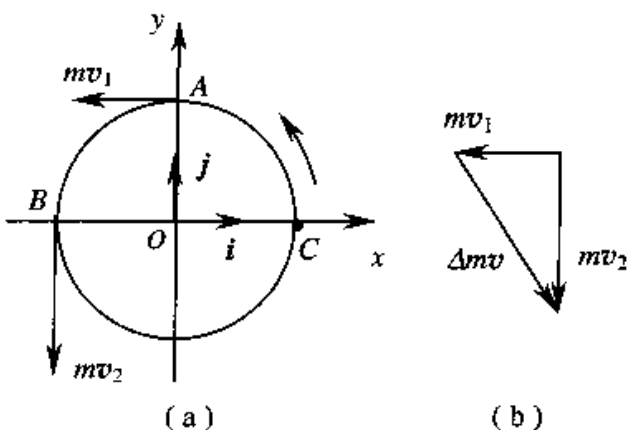


图 3.2

三、质点系的动量定理

在实际情况下, 我们需要研究多个有相互作用的物体的运动情况, 此时, 就可以把这些物体作为整体系统来研究, 称为物体系. 如果其中的每一物体都能抽象为质点, 这就把物体系抽象为质点系了. 我们把系统内各物体之间的相互作用力称为内力, 而系统以外的物体对系统内任何物体的作用力称为系统所受的外力. 我们首先来研究由二个质点 m_1 和 m_2 组成的系统, 如图 3.3 所示. 设 m_1 受系统内 m_2 的作用力为 f_{12} , m_1 受系统外的物体的作用力为 F_1 , 同时 m_2 受系统内 m_1 的作用力为 f_{21} , 受系统外物体的作用力为 F_2 . t_1 时刻 m_1 的速度为 \mathbf{v}_{10} , m_2 的速度为 \mathbf{v}_{20} , t_2 时刻 m_1 的速度为 \mathbf{v}_1 , m_2 的速度为 \mathbf{v}_2 .

对 m_1 应用动量定理, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_{12}) dt = m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{v}_{10}$$

对 m_2 应用动量定理, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_2 + \mathbf{f}_{21}) dt = m_2 \mathbf{v}_2 - m_2 \mathbf{v}_{20}$$

将上两式相加, 则

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_{12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{f}_{21}) dt = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) - (m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20})$$

由牛顿第三定律可知 $f_{12} = -f_{21}$, 上式为

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) dt = (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) - (m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20}) \quad (3-9)$$

用 \mathbf{F} 表示系统所受的外力, 将上式推广到有 n 个质点的系统, 为

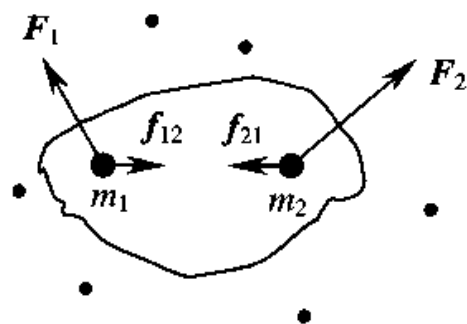


图 3.3 质点系的内力和外力

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{i0}$$

用 $\mathbf{I}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}$ 分别表示合外力的冲量、初动量和末动量, 上式可写为

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0 \quad (3-10)$$

此即为质点系的动量定理, 它表明作用于质点系的所有外力之矢量和的冲量, 等于质点系总动量的增量。

可以看出, 只有外力的冲量才对体系的总动量变化有贡献, 内力对体系的总动量变化没有贡献; 但内力对动量在体系内部的分配是有作用的。应该注意, 质点系在任一时刻的总动量等于系统内每一个质点在该时刻动量的矢量和。

下面, 我们再分析动量定理与牛顿定律的关系。对一个质点来说, 牛顿定律表示的是力的瞬间效果, 而动量定理表示的是力对时间的累积效果。这可以用实验来说明。一悬挂起来的大木块用木锤子敲击一下后, 只发生轻微的抖动, 而用手指推一会, 却能获得较大的速度。牛顿定律只告诉我们由于锤子的敲击力大, 故木块获得的加速度大, 手推的力小, 木块获得的加速度小; 而动量定理却告诉我们, 由于前者作用的时间短, 故木块获得的速度小, 而后者作用的时间长, 故木块获得的速度就大。这也就是说, 牛顿定律是动量定理的微分形式, 动量定理则是牛顿定律的积分形式。实际生活中, 对应于一定量的动量变化, 通过延长(或缩短)作用的时间而减小(或增大)作用力的例子是很多的。跳高运动员利用软垫着地是前者的例子; 用锤敲钉或用夯打桩则是后者的例子。

牛顿定律只适用于质点, 不能直接用于质点系。而动量定理可适用于质点系。当质点系受外力作用时, 不能直接用牛顿定律得出系统整体以某一加速度运动的结论, 因为系统中各质点的运动并不相同, 但系统的动量的增加仍等于合外力的冲量。

与牛顿定律一样, 动量定理也只适用于惯性系。要在非惯性系应用动量定理, 必须考虑惯性力的冲量。

§ 3.2 动量守恒定律

一、动量守恒定律

由式(3-9)及(3-10)可知, 当系统所受的合外力为零, 即 $\mathbf{F} = 0$ 时, 系统总动量的增量为零, 即 $\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = 0$, 这时系统的总动量保持不变, 即

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = \text{恒矢量} \quad (3-11)$$

这就是动量守恒定律,它表明,当系统所受合外力为零时,系统的总动量保持不变。

理解质点系动量守恒定律应注意以下几点:

(1) 在动量守恒定律中,系统的动量是守恒量或不变量。由于动量是矢量,故系统的总动量不变是指系统内各物体动量的矢量和不变,而不是指其中某一物体的动量不变。此外,各物体的动量必须相对于同一惯性参考系。

(2) 动量守恒定律的数学式(3-11)是一个矢量关系式,在实际计算时,可采用其沿坐标轴分解的分量式,例如在直角坐标系中,

$$\left(\text{当 } \sum F_{ix} = 0 \text{ 时}\right) \quad P_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常量}$$

$$\left(\text{当 } \sum F_{iy} = 0 \text{ 时}\right) \quad P_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常量}$$

$$\left(\text{当 } \sum F_{iz} = 0 \text{ 时}\right) \quad P_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常量}$$

如果系统所受外力的矢量和并不为零,但合外力在某个坐标轴上的分矢量为零,此时,系统的总动量虽不守恒,但在该坐标轴的分动量却是守恒的,从而使问题简化。

(3) 系统的动量守恒是有条件的,这个条件就是系统所受的合外力必须为零,然而,有时系统所受的合外力虽不为零,但与系统的内力相比较,外力远小于内力,这时可略去外力对系统的作用,认为系统的动量是守恒的。像碰撞、打击、爆炸等这类问题,一般都可这样来处理。

(4) 动量守恒定律是物理学基本的定律之一,动量守恒定律虽然是从表述宏观物体运动规律的牛顿运动定律导出的,但近代的科学实验和理论分析都表明:在自然界中,大到天体间的相互作用,小到质子、中子、电子等微观粒子间的相互作用,都遵守动量守恒定律,而微观领域牛顿运动定律却是不适用的。

例 3-2 如图 3.4 所示,设炮车以仰角 β 发射炮弹,炮身和炮弹的质量分别为 M 和 m ,炮弹在出口处相对炮身的速度为 u ,试求炮身的反冲速度 V ,设地面摩擦力可以忽略。



图 3.4

解 选取炮身和炮弹为体系,体系在竖直方向

受地面支承力及重力作用,水平方向不受作用力,在水平方向体系的动量守恒.

由相对运动公式,炮弹相对地面的 v 为

$$v = u + V$$

故
$$v_x = u \cos \beta - V \tag{1}$$

又由水平方向动量守恒,有

$$mv_x - Mv = 0 \tag{2}$$

(1)式代入(2)式

$$mu \cos \beta - mV - MV = 0$$

故
$$V = \frac{mu \cos \beta}{m + M}$$

二、火箭飞行原理

火箭是一种利用燃料燃烧后喷出的气体产生的反冲推力的发动机.它自带燃料与助燃剂,因而可以在空间任何地方发动.火箭技术在近代有很大的发展.火箭炮以及各种各样的导弹都利用火箭发动机作动力.空间技术的发展更以火箭技术为基础.各式各样的人造地球卫星、飞船和空间探测器都是靠火箭发动机发射并控制航向的.

火箭飞行原理分析如下.为简单起见,设火箭在自由空间飞行,即它不受引力或空气阻力等任何外力的影响.如图 3.5 所示,把某时刻 t 的火箭(包括火箭体和其中尚存的燃料)作为研究的系统,其总质量为 M ,以 v 表示此时刻火箭的速度,则此时刻系统的总动量为 Mv (沿空间坐标 x 轴正向).此后经过 dt 时间,火箭喷出质量为 dm 的气体,其喷出速度相对于火箭体为定值 u .在 $t + dt$ 时刻,火箭体的速度增为 $v + dv$.在此时刻系统的总动量为

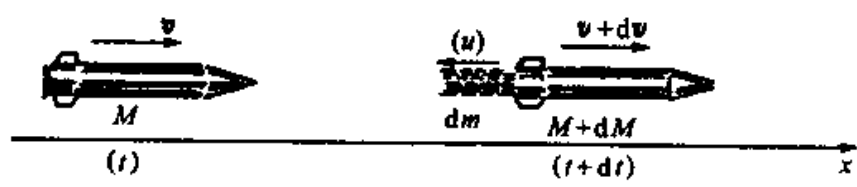


图 3.5 火箭飞行原理说明图

$$dm \cdot (v - u) + (M - dm)(v + dv)$$

由于喷出气体的质量 dm 等于火箭质量的减小,即 $-dM$,所以上式可写为

$$-dM \cdot (v - u) + (M + dM)(v + dv)$$

由动量守恒定律可得

$$-dM \cdot (v - u) + (M + dM)(v + dv) = Mv$$

展开此等式,略去二阶无穷小量 $dM \cdot dv$,可得

$$udM + Mdv = 0$$

或者

$$dv = -u \frac{dM}{M}$$

设火箭点火时质量为 M_i ,初速为 v_i ,燃料烧完后火箭质量为 M_f ,达到的末速度为 v_f ,对上式积分则有

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

由此得

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (3-12)$$

此式表明,火箭在燃料燃烧后增加的速度和喷气速度成正比,也与火箭的始末质量比(以下简称质量比)的自然对数成正比.

如果以喷出的气体 dm 为所考虑的系统,它在 dt 时间内的动量变化率为

$$\frac{dm \cdot [(v - u) - v]}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

根据牛顿第二定律可知,这就等于喷出气体受火箭体的推力.再由牛顿第三定律可得,喷出气体对火箭体的推力 F 与此力大小相等、方向相反,即

$$F = u \frac{dm}{dt} \quad (3-13)$$

此式表明,火箭发动机的推力与燃料燃烧速率 dm/dt 以及喷出气体的相对速度 u 成正比.例如,一种火箭的发动机的燃烧速率为 $1.38 \times 10^4 \text{ kg/s}$,喷出气体的相对速度为 $2.94 \times 10^3 \text{ m/s}$,理论上它所产生的推力为

$$F = 2.94 \times 10^3 \times 1.38 \times 10^4 = 4.06 \times 10^7 \text{ (N)}$$

这相当于 4000t 海轮所受的浮力!

由(3-12)式可知,要想增大单级火箭(只有一个发动机的火箭叫单级火箭)的末速度可以采用两个方法:一是增大喷出气体的相对速度;二是增大火箭的质量比.近代高能推进剂如液氧加液氢的喷气速度可达 4.1 km/s .考虑到火箭体本身的结构

和必要的载荷,火箭质量比增大有限制.目前单级火箭的质量比可做到 15.因此在目前最好的情况下,单级火箭从静止开始可获得的末速度约为 11km/s .由于实际上从地面发射时,火箭要受到地球引力和空气阻力,所以末速度只可能达到 7km/s 左右.这一速度小于第一宇宙速度(7.9km/s),所以用单级火箭不能把人造地球卫星或其它航天器送入轨道.

为了发射人造地球卫星或其它航天器,人们制造了由若干单级火箭串联形成的多级火箭(如图 3.6).发射时,第一级火箭先点火,火箭即开始加速上升.等这一级火箭所储存的燃料燃烧完后,整个这一级就自动脱落,以便增大此后火箭的质量比.随后第二级点火使火箭继续加速,它的燃料用完后又自动脱落.然后又第三级点火,这样一级一级地使火箭的有效载荷加速而最后达到需要的速度.设各级火箭工作时,火箭的质量比分别为 N_1, N_2, \dots, N_n , 并设各级火箭的喷气速度分别是 u_1, u_2, \dots, u_n , 则由(3-12)式可得多级火箭发射后的最终速度为

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = u_1 \ln N_1 + u_2 \ln N_2 + \dots + u_n \ln N_n \quad (3-14)$$

由于技术上的原因,多级火箭一般是三级的.以美国发射“阿波罗”登月飞船的“土星五号”火箭为例,起飞时质量约 2800t ,高约 85m .第一级喷气速度为 2.9km/s ,产生 $3.5 \times 10^4\text{kN}$ 的推力.这一级的质量比为 16.第二级燃料喷气速度约为 4km/s ,质量比为 14.第三级燃料与第二级相同,质量比为 12.这种火箭的末速度的理论值按(3-14)式计算可得约为 28km/s .由于空气阻力和重力的影响,末速度要比此计算值小得多.

火箭最早是中国发明的.我国南宋时出现了作烟火玩物的“起火”.其后就出现了利用起火推动的翎箭.明代茅元仪著的《武备志》(1628年)中记有利用火药发动的“多箭头”(10到100支)的火箭,以及用于水战的叫做“火龙出水”的二级火箭.我国现在的火箭技术也已达到世界先进水平.



图 3.6 多级火箭示意图

§ 3.3 动能定理

在前两节,我们从牛顿第二定律出发,将原有的 F 与 a 的瞬时对应关系转换成了力的时间累积及累积的效果即状态量 P 的增量的关系,研究力的冲量是以力表示为时间的函数为前提的,但许多问题中力是空间位置的函数,如弹性力、万有引力等.这就涉及到力的空间累积及累积的效应.

一、功

在初中和高中的物理课程中都讨论过恒力做功的简单概念.

设质点在恒力 F 作用下沿一直线运动,位移为 Δr ,力 F 的方向与物体位移间成 θ 角,则力 F 对质点所作功 A 的定义为力在质点位移方向上的分量与质点位移的乘积,如图 3.7 所示,

$$A = F \cos \theta |\Delta r|$$

或表示为力与质点位移的标积

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (3-15)$$

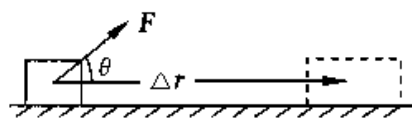


图 3.7 恒力的功

功是标量,没有方向,但有正负,当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $A > 0$,力对质点作正功;当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, $A < 0$,力 F 对质点作负功,或者说质点反抗外力作了功;当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,该力对质点不作功,例如系着小球作圆周运动的绳中的张力对小球不作功.

特别地,如果恒力 F 的方向与质点位移的方向一致,即夹角 $\theta = 0$,那么这个力所做的功就等于它的大小 F 和质点移动距离 S 的乘积,即

$$A = FS \quad (3-16)$$

在国际单位制中,功的单位称为焦耳,符号为 J , $1J = 1N \cdot m$.

若质点在变力 F 作用下沿曲线运动,如图 3.8 所示,在从 a 点移动到 b 点的过程中,将质点的运动轨道分成许多小段,使任一小段都很短,可近似看成直线,每小段上质点所受的力可看作恒力,则在任一小段位移 Δr_i 上,力对质点所作元功可表示为

$$\Delta A_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

质点从 a 沿曲线移动到 b 的过程中,力 F 对物体所作的功等于每一小段功之总和,可

写成

$$A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

上式在 $|\Delta \mathbf{r}_i| \rightarrow 0$ 的极限情况下可写成积分形式

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F \cos\theta ds \quad (3-17)$$

式中 θ 为 \mathbf{F} 与 $d\mathbf{r}$ 之间的夹角. 要计算上述积分, 必须知道 F 和 θ 随路程变化的函数关系. 上式的积分, 数学上称为线积分.

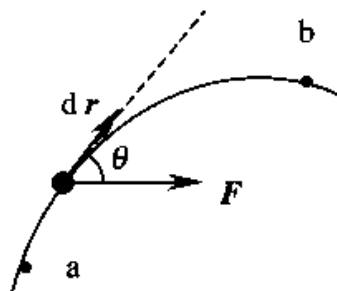


图 3.8 变力做功

在直角坐标系中, \mathbf{F} 和 $d\mathbf{r}$ 的分量式为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

从而

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3-18)$$

从功的计算式可以得到关于功的以下几个性质:

- (1) 功是标量, 即只有大小和正负, 而不具有方向性.
- (2) 因为质点的位移是与参考系的选择有关的相对量, 因此功随所选参考系不同而异.
- (3) 合力的功等于各分力的功的代数和.

$$A = \int_a^b \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \int_a^b \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$$

功的大小固然重要, 但有时做功的快慢也是我们十分关心的. 我们用功率这个物理量来表征做功的快慢. 如果完成 ΔA 的功需时间 Δt , 那么 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 在 t 时刻附近平均功率 $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 的极限值称为 t 时刻的瞬时功率, 即

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad (3-19)$$

或

$$P = F \cos\theta \frac{dr}{dt} = Fv \cos\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (3-20)$$

对于功率一定的机器, 其牵引力与速度成反比. 汽车在上坡时, 需减速以加大牵引力就是这个原因.

二、质点的动能定理

一个质点受到合外力作用时,物体的运动状态将发生变化,现在我们探讨合外力对质点做功的结果与质点运动状态变化之间的关系.

1. 恒力情况

一个质点沿直线由 a 点运动到达 b 点,在 a 点时,其速度为 v_a , b 点时速度为 v_b ,经过位移为 Δr ,若所受合外力 F 为恒力,且其方向与质点运动的方向相同,当然,加速度 $a = \frac{F}{m}$ 也是恒定的.由于质点是匀变速直线运动,应有关系式

$$2as = v_b^2 - v_a^2$$

式中 $s = |\Delta r|$,合外力对质点做功为

$$A = F \cdot \Delta r = Fs = mas = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (3-21)$$

即作用在一个质点上的合力 F 所作的功,恰好等于该质点“ $\frac{1}{2}mv^2$ ”的增量.在式(3-

21)中,我们定义质点速率的状态函数 $\frac{1}{2}mv^2$ 叫作质点的动能,记作

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

故

$$A = E_{kb} - E_{ka} \quad (3-22)$$

这就是质点的动能定理,定理表明,合力对质点所作的功等于质点动能的增量.

2. 变力情况

当质点所受合力是变力时,质点作曲线运动.如图 3.9 所示.根据功的定义

$$A = \int F \cdot dr = \int F \cos \theta ds$$

考虑到 $F \cos \theta = F_\tau$ 是合外力 F 在轨迹切线方向的分力,而切向加速度 $a_\tau = \frac{dv}{dt}$,速度大小 $v = \frac{ds}{dt}$,当质点

从 a 点运动到 b 点时,速度相应地由 v_a 变为 v_b ,上式可改写为

$$A = \int F \cos \theta ds = \int m a_\tau v dt = \int_{v_a}^{v_b} m v dv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (3-23)$$

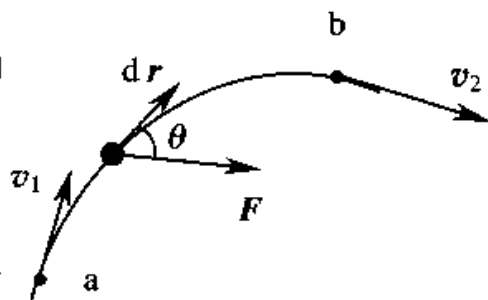


图 3.9 动能定理的推导

在合外力是变力,质点作曲线运动时也推导出了动能定理.

动能定理是由牛顿第二定律导出的.显然,物理定理是在物理定律的基础上经过数学演绎得到的规律,它也以数学方程的形式表达.动能定理与牛顿定律成立条件相同,即只在惯性参考系中成立,在不同的惯性参考系中,尽管合外力的功及质点的动能有不同的数值,但动能定理的表达形式仍保持不变.

由动能定理可知,当合外力作正功, $A > 0$ 时,质点的动能增加,即质点末状态的动能大于初状态的动能,而且增加量恰等于 A ,说明此时合外力的功量度了外界通过相互作用传递给质点的动能;当合外力作负功,则 $A < 0$,合外力的功则量度了质点传递给外界的能量;当合外力做功为零时,即 $A = 0$ 时,质点与外界无能量的交换.

物理学中功的定义的意义就在于:作功与物体某种能量的变化相联系.因此,作功是能量传递和转化的一种方式,而功就是被传递和转化的能量的量度.

最后再谈一下动能与动量的关系.动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 和动量 $P = mv$ 都是利用 m 与 v 这两因素来表示物体的运动状态,它们都是物体运动状态的函数,因而,两者之间必然存在着内在联系,不难看出,两者在数量上的关系为

$$E_k = \frac{P^2}{2m} \quad (3-24)$$

当然,两者也是有区别的.动量是矢量,它纯属机械运动的性质,而动能是标量,它是能量的一种形式,能量并不限于机械运动.在以后的学习中,我们还会遇到其他各种能量,如电能、热能、光能、化学能、原子能……,动能和这些能量是可以相互转化的.

§ 3.4 势 能

一、保守力

由功的计算式 $A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 可知,一般情况下, \mathbf{F} 所作的功不仅与力 \mathbf{F} 以及物体的初、末位置 a, b 有关,而且与物体所经过的路径有关.但是,有些力的功只与物体的初、末位置有关,而与物体所经过的实际路径无关,这种力称为保守力,不具备这

种性质的力称为非保守力,重力、万有引力、弹性力、电荷间相互作用的库仑力和原子间相互作用的分子力都是保守力,下面分析重力、万有引力和弹性力做功的情况.

1. 万有引力做功

如图 3.10 所示,有两个质量为 m 和 m' 的质点,其中质点 m' 固定不动, m 经任一路径由点 A 运动到点 B ,如取 m' 的位置为坐标原点,那么 A, B 两点对 m' 的距离分别为 r_A 和 r_B ,设在某一时刻质点 m 距质点 m' 的距离为 r ,其位矢为 \mathbf{r} ,这时质点 m 受到质点 m' 的万有引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{m'm}{r^2} \mathbf{e}_r$$

\mathbf{e}_r 为沿位矢 \mathbf{r} 的单位矢量,当 m 沿路径移动位移元 $d\mathbf{r}$ 时,万有引力作的功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{m'm}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$$

从图 3.10 可以看出

$$\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{e}_r| |d\mathbf{r}| \cos\theta = |d\mathbf{r}| \cos\theta = dr$$

于是,上式为

$$dA = -G \frac{m'm}{r^2} dr$$

所以,质点 m 从点 A 沿任一路径到达点 B 的过程中,万有引力作的功为

$$A = \int_A^B dA = -Gm'm \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr$$

即

$$A = Gm'm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (3-25)$$

上式表明,当质点的质量 m' 和 m 均给定时,万有引力作的功只取决于质点 m 的起始和终止的位置,而与所经过的路径无关,这是万有引力的一个重要特征.

2. 重力做功

如图 3.11 所示,设一个质量为 m 的质点,在重力作用下从点 A 沿 ACB 路径至点 B ,点 A 和点 B 距地面的高度分别为 y_1 和 y_2 ,因为质点运动的路径为一曲线,所以重力和质点运动方向之间的夹角是不断变化的,我们把路径 ACB 分成许多位移元.在位移元 $d\mathbf{r}$ 中,重力 \mathbf{P} 所作的功为

$$dA = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$$

若质点在平面内运动,按图 3.11 所选坐标,并取地面上某一点为坐标原点 O ,有

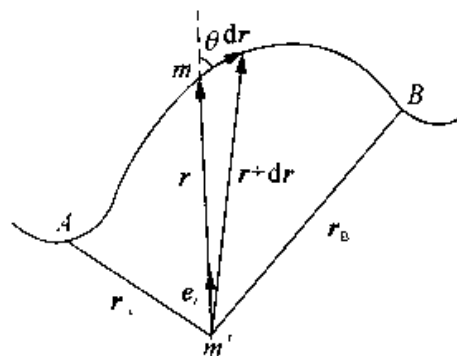


图 3.10 万有引力做功

$$dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

且 $\mathbf{P} = -mg\mathbf{j}$. 于是, 前式为

$$dA = -mg \cdot \mathbf{j} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -mg dy$$

质点由点 A 移至点 B 的过程中, 重力作的总功为

$$A = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$

即 $A = -(mgy_2 - mgy_1)$ (3-26)

若从点 A 沿 ADB 路径至点 B, 显然结果是一样的. 上述结果表明, 重力做功只与质点的起始和终了位置有关, 而与所经过的路径无关. 这是重力做功的一个重要特点.

3. 弹性力作功

图 3.12 所示是一放置在光滑平面上的弹簧, 弹簧的一端固定, 另一端与一质量为 m 的物体相连接. 当弹簧在水平方向不受外力作用时, 它将不发生形变, 此时物体位于 O (即位于 $x = 0$ 处), 这个位置叫做平衡位置, 现以平衡位置 O 为坐标原点, 向右为 Ox 轴正向.

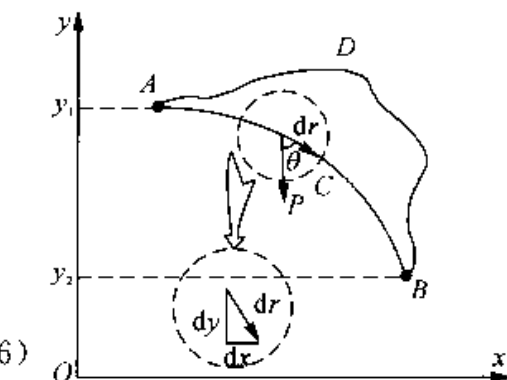


图 3.11 重力沿任意路径对物体作的功

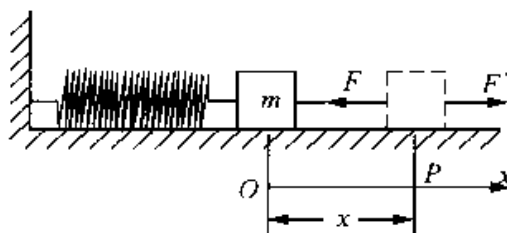


图 3.12 弹簧的伸长

若物体受到沿 Ox 轴正向的外力 F' 作用, 弹簧将沿 Ox 轴正向被拉长, 弹簧的伸长量即其位移为 x . 根据胡克定律, 在弹性限度内, 弹簧的弹性力 F 与弹簧的伸长量 x 之间的关系为

$$F = -kxi$$

式中 k 称为弹簧的劲度系数. 在弹簧被拉长的过程中, 弹性力是变力 (图 3.13). 但弹簧位移为 dx 时的弹性力 F 可近似看成是不变的. 于是, 弹簧位移为 dx 时, 弹性力作的元功为

$$dA = F \cdot dx = -kxi \cdot dx = -kx dx \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

有

$$dA = -kx dx$$

这样, 弹簧的伸长量由 x_1 变到 x_2 时, 弹性力所作的

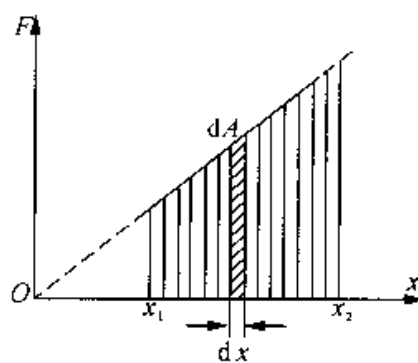


图 3.13 弹性力作的功

功就等于各个元功之和,数值上等于图 3.13 所示梯形的面积.由积分计算可得

$$A = \int dA = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

$$A = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \quad (3-27)$$

从式(3-27)可以看出,对在弹性限度内具有给定劲度系数的弹簧来说,弹性力所作的功只由弹簧起始和终止的位置(x_1 和 x_2) 决定,而与弹性形变的过程无关.这一特点与重力做功和万有引力做功的特点是相同的.

二、保守力做功的数学表达式

从上述对重力、万有引力和弹性力做功的讨论中可以看出,它们所作的功只与物体(或弹簧)的始、末位置有关,而与路径无关.这是它们做功的一个共同特点.

如图 3.14(a) 所示,设一物体在保守力作用下自点 A 沿路径 ACB 到达点 B,或沿路径 ADB 到达点 B.根据保守力做功与路径无关的特点,有

$$A_{ACB} = A_{ADB} = \int_{A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3-28)$$

显然,此积分结果只是 A, B 两点位置的函数.如果物体沿如图 3.14(b) 所示的 ACBDA 闭合路径运动一周时,保守力对物体作的功为

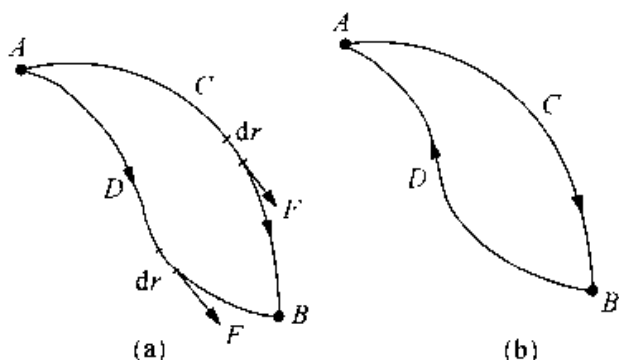


图 3.14 保守力做功

$$A = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

由于

$$\int_{BDA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

所以,上式为

$$A = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{ACB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{ADB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

由式(3-28), 上式为

$$A = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3-29)$$

上式表明, 物体沿任意闭合路径运动一周时, 保守力对它所作的功为零, 式中积分号 \oint_l 表示沿闭合曲线积分. 式(3-29) 是反映保守力作功特点的数学表达式. 无论是重力、万有引力、弹性力、库仑力和分子力它们沿闭合路径作功都符合式(3-29). 此处还应指出, 保守力作功与路径无关的特点与保守力沿任意闭合路径一周作功为零的特点是一致的, 也即是等效的.

在物理学中并非所有的力都具有作功与路径无关这一特点, 例如常见的摩擦力, 它所作的功就与路径有关, 路径越长, 摩擦力作的功也越大. 显然, 摩擦力就不具有保守力作功的特点. 另外, 还有一些力作功也与路径有关, 如磁场对电流作用的安培力, 它作的功也与路径有关. 它们都是非保守力.

三、势能

如果质点在某一部分空间内的任何位置, 都受到一个大小和方向完全确定的保守力的作用, 称这部分空间存在着保守力场.

在保守力场中仅有保守力作功的情况下, 质点从某点沿任意路径移动到另一点时, 其动能将发生确定的变化, 从上面关于重力作功、弹性力作功、万有引力作功的讨论中知道, 各种不同保守力的功的具体形式虽不同, 但都可以表示为某种仅与物体位置有关的标量函数在初始和终止位置的数值之差. 因此, 存在一个由系统内部质点之间的相对位置决定的状态函数, 我们称之为势能, 并规定: 系统相对位置变化的过程中, 成对保守内力作功之和等于系统势能的减少量, 对于 M 和 m 组成的两质点体系, 以 M 的位置为坐标原点, 则 m 的势能就可以表示体系的势能. 用 E_P 表示势能, 则

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -(E_{P_b} - E_{P_a}) = -\Delta E_P \quad (3-30)$$

要选定一个位置作为势能零点, 才能确定任一位置系统的势能值. 例如, 当把上式中 b 点选为势能零点时, 即 $E_{P_b} = 0$, m 在任意位置 a 处的势能为

$$E_{P_a} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (3-31)$$

上式说明, m 在任一位置的势能等于 m 从该位置沿任意路径移动到势能零点的过程中, 保守内力所作的功. 由势能定义可得

(1) 弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (3-32)$$

式中选弹簧自然长度位置为势能零点.

(2) 重力势能

$$E_p = mgh \quad (3-33)$$

式中选地面为势能零点, h 为质点的高度.

(3) 引力势能

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (3-34)$$

式中选两质点相距无穷远处为势能零点.

下面对势能 E_p 作些说明.

(1) E_p 的物理意义

由保守力作功的特点可知, 只要质点的起始位置与终止位置确定了, 则功 A 的值就确定了. 或者说功 A 的值由质点在起点和终点时的 E_p 值之差来决定. 在运动学中我们知道质点某时刻的位置矢量与速度均是描述质点运动状态的物理量, 而 E_p 也是状态的函数, 与动能 E_k 有相同的属性, 故 E_p 就称为势能(或位能, 取其决定于位置之意).

由于势能只与位置坐标有关, 质点如果长期处在保守力场中的某个位置, 那么势能便会长期保持恒定不变. 一旦条件许可, 这种潜在的能量便会通过保守力作功释放出来. 如果保守力作的功 $A > 0$, 表明 E_p 减少, 说明保守力作功是以势能的减少为代价的. 若 $A < 0$, 则 E_p 增加, 说明实际是外力作了正功, 并以势能的形式储存了起来.

(2) 保守力与势能的关系

若把式(3-30)写成微分形式

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dE_p \quad (3-35)$$

在直角坐标系中 dE_p 的全微分为

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial E_P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\
 &= \left(\frac{\partial E_P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

代入式(3-35)中,则有

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial E_P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

这就是保守力与势能的关系. 由此式可知, 只要势能和位置坐标的函数关系已知, 就可立即求出对应于这种势能的保守力来. 例如, 弹性势能 $E_P = \frac{1}{2} kx^2$, 故知弹性力为

$$\mathbf{F} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) \mathbf{i} = - kx \mathbf{i}$$

(3) 势能值的相对性

单独谈论某一点的势能值没有什么意义, 只有势能差才有意义. 一般来说, 如何选择势能零点, 原则上无所谓, 但选择得合适, 可以使势能的表达式简便, 便于运算. 仅此而已.

(4) 势能是属于系统的

大家已经知道, 势能的存在, 是由于物体间有着相互作用的保守力, 或是由于物体各部分间出现了相互作用的保守力, 并且势能值是由物体间的相对位置或物体的形变所决定的, 说明势能是针对某个物体或质点系而言的. 平时我们习惯讲的“某物体的势能”, 实际上是不严格的.

四、势能曲线

如果给定了一个保守力, 则可以从势能定义式求得势能, 许多情况下, 特别是在微观领域中, 用势能函数来描述力的特性, 要比用力的各个分量来描述更为简明. 首先, 我们来看用一维势能系统如何寻求力.

在坐标系和势能零点确定后, 物体的势能仅仅是位置坐标的函数. 在一维情况下, 画出势能随坐标变化的曲线, 称为势能曲线. 图 3.15 画出了重力势能曲线、弹性势能曲线和引力势能曲线.

以下对势能曲线作几点说明:

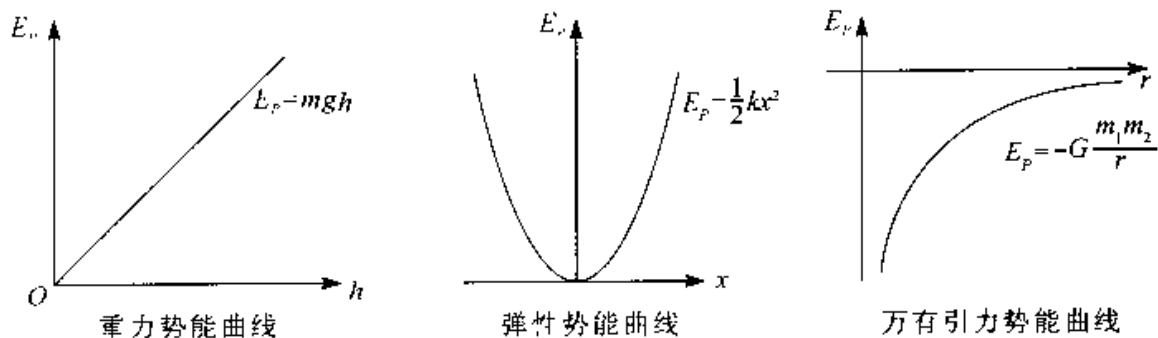


图 3.15 势能曲线

(1) 由势能曲线求保守力

由于保守力做功等于势能的减少, 在一维情况下, 由于 $f dx = -dE_p(x)$

则
$$f = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad (3-36)$$

上式表明, 在一维情况下, 保守力指向势能下降的方向, 其大小正比于势能曲线的斜率.

(2) 求平衡位置

所谓平衡位置, 就是两质点间相互作用力为零的相对位置, 在势能曲线图上, 就是切线斜率为零的点. 势能曲线可形象地表示系统的稳定性.

(3) 用势能曲线分析分子力

原子之间的相互作用力称为分子力. 分子力是保守力, 可用势能表示. 定性描述分子力的势能曲线如图 3.16 所示, 横坐标 r 表示两原子中心之间距离, 纵坐标代表原子间的相互作用势能.

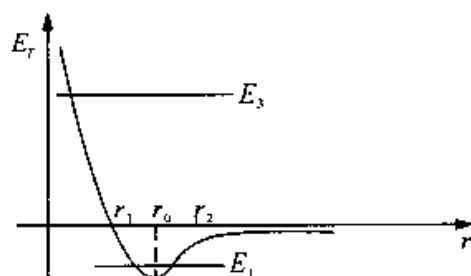


图 3.16 分子力势能曲线

当 r 小于某一距离 r_1 时, 势能急剧上升, 它使原子不能进一步彼此靠近. 在 $r = r_0$ 附近, 两个相对静止的原子形成分子, 这是一个低“谷”, 是一个稳定的平衡点. 当总能量 $E = E_1 < 0$ 时, 原子动能不大, 它们将围绕平衡位置作小振动, 相当于固体情况. 若动能足够大, $E = E_2 > 0$ 时, 两原子将自由地飞散, 而且, 当能量增加时, 原子间的最小距离并不明显改变, 这时, 原子的行为就像刚球, 这相当于气体的情况.

§ 3.5 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理

与质点系的动量定理类似,我们来看力在空间上的累积对质点系的应用.

我们把系统外质点对系统内质点的作用力,称为外力;系统内部各质点之间的相互作用力称为内力;此外,内力还可根据是不是保守力而分为保守内力与非保守内力.

对于两个质点组成的系统而言,它们的质量分别为 m_1 和 m_2 , F_1, F_2 和 f_1, f_2 分别表示它们所受的外力和内力, v_{1a}, v_{2a} 和 v_{1b}, v_{2b} 分别表示它们始末的速度.

对两质点分别用动能定理:

$$\text{对 } m_1 \quad \int_a^b \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_a^b \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1b}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2$$

$$\text{对 } m_2 \quad \int_a^b \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_a^b \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2b}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2a}^2$$

上式两边分别相加,则得到

$$A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{kb} - E_{ka} \quad (3-37)$$

这就是说,所有外力和内力对质点系所作功的总和等于系统动能的增量.这一结论可以推广到由任意多个质点组成的质点系,所以这就是质点系的动能定理.对于质点系而言应该注意,内力作的功之和可以不为零,因而可以改变系统的总动能.

二、功能原理

根据 $A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_{kb} - E_{ka}$, 将 $A_{\text{内}}$ 分为保守内力做的功 $A_{\text{保内}}$ 与非保守内力做的功 $A_{\text{非保内}}$, 而保守力的功与相关势能的关系为 $A_{\text{保内}} = -(E_{Pb} - E_{Pa})$, 其中 $E_{kb}, E_{ka}, E_{Pb}, E_{Pa}$ 分别表示质点系在 b, a 两点对应的总动能和总势能.

故(3-37)式可变化为

$$\begin{aligned} A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} + A_{\text{保内}} &= E_{kb} - E_{ka} \\ A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} &= (E_{kb} + E_{Pb}) - (E_{ka} + E_{Pa}) \end{aligned} \quad (3-38)$$

因为系统动能与势能之和称为系统机械能,用 E 表示,即 $E = E_k + E_P$, 所以

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = E_b - E_a$$

此式表明,外力及非保守内力所作功的总和等于系统机械能的增量,这一结论称为系统的功能原理.功能原理全面地概括和体现了力学中的功能关系,质点和质点系的动能定理只是它的特殊情形,功能原理是普遍的功能关系.由于动能定理的基础是牛顿定律,故功能原理也只能在惯性系中成立.

三、机械能守恒定律

由功能原理可知,当 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$ 时, $E_b = E_a$, 即

$$E = E_k + E_p = \text{恒量} \quad (3-39)$$

这就是说,当外力和非保守内力都不做功或所作功的总和为零时,系统的机械能保持不变.这一结论叫做机械能守恒定律.

由(3-38)式还可把机械能守恒定律写成

$$E_{kb} - E_{ka} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

即

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \quad (3-40)$$

上式说明,质点系在满足“所有外力和非保守内力对系统所做的总功为零”的条件下,系统的动能和势能的总和保持不变,但系统内各质点的动能和势能可通过保守力做功而相互转换.典型的例子是作自由落体的物体,由于不受任何阻力,所以物体与地球组成的系统的机械能守恒.它们的动能与重力势能的总量不变,但动能与势能随着高度的变化而在不断地相互转化.

在机械运动范围内,所涉及的能量只有动能和势能.在长期的生产和科学实验中,人们总结出:对于一个封闭系统来说,系统内各种形式的能量可以相互转换,但是不论怎样转换,能量既不能创生,也不能消失,这一结论叫做能量守恒定律.

例 3-3 求使物体脱离地球引力作用的最小速度.

解 将物体由地面发射并脱离地球引力作用的最小速度,称为第二宇宙速度,也称为地球的逃逸速度.当物体处于地面时,物体与地球所组成的系统的引力势能为 $-G \frac{mM}{R}$, 物体至少应具有大小等于引力势能的动能,才能摆脱地球引力的束缚,逃逸到地球引力作用范围以外的空间去.当物体到达地球引力作用范围以外的空间时,付出了自己的全部动能,用以克服地球引力而做功,物体与地球组成的系统的引力势能变为零.根据机械能守恒定律,应有

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{R} = 0,$$

故得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由此可见,第二宇宙速度是第一宇宙速度的 $\sqrt{2}$ 倍.

我们可以根据上面得到的逃逸速度公式设想一下,如果在宇宙中存在一个这样的星球,它的质量足够大,以致算得的逃逸速度正好等于真空中的光速 c ,那么由于一切物体的运动速度都不可能超过真空中的光速,这个星球上的一切物体都不能摆脱其引力束缚而逃逸.甚至光子也不能例外,即使它是宇宙中的最大的发光天体,我们也看不到它.这种奇妙的天体就是在广义相对论中所预言的“黑洞”.长期以来人们推测,天鹅座 X-1 的一个子星就是一个黑洞.到 1995 年年底为止,科学家们声称已经发现了三个黑洞,而到 1996 年 10 月科学家又推断银河中心可能存在一个黑洞.因为对银河系中的 39 个恒星的运动轨迹进行了长期的观测发现,它们都在围绕银心附近的一个区域运动,所以断定在这个区域存在一个质量巨大而又观察不到的天体,这个天体可能就是黑洞.这个黑洞的质量约为太阳的 250 万倍,并且正在吞噬着周围的天体.

既然连光线都传播不出来,那么我们是如何发现黑洞的呢?实际上,在黑洞外围空间由于强大的引力作用,当物质粒子或光子经过那里的时候,其运动轨道会发生弯曲,这种现象称为“引力透镜”效应.我们可以通过引力透镜效应去发现黑洞的存在.

例 3-4 求使物体不仅摆脱地球引力作用,而且脱离太阳引力作用的最小速度.

解 由地球表面发射的物体,不仅使它摆脱地球引力,而且使它脱离太阳引力所需要的最小速度,称为第三宇宙速度.在一般情况下计算第三宇宙速度是相当复杂的,因为物体在运动过程中,同时受到地球、太阳和其他天体的引力作用.为简便起见,我们作如下近似处理:

(1) 物体由地面发射直至达到地球引力作用范围以外的某点(用 C 表示)的过程中,只考虑地球的引力作用,而忽略太阳和其他天体的引力作用;

(2) 物体由点 C 继续运动,直至脱离太阳引力作用范围的过程中,只考虑太阳的引力作用,而忽略地球和其他天体的引力作用;

(3) 物体到达脱离地球引力作用的点 C,虽然离开地球已足够远,但对太阳来

说,仍然可以认为它是处于地球绕太阳公转的轨道上.

物体在点 C 必须具有一定的动能才能脱离太阳的引力作用. 根据机械能守恒定律,物体在点 C 相对太阳的速度 v'_2 应满足下式

$$\frac{1}{2}mv'_2{}^2 - G\frac{mM_s}{r_0} = 0,$$

式中 m 是物体的质量, $M_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 是太阳的质量, $r_0 = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 是地球到太阳的平均距离. 于是立即求得

$$v'_2 = \sqrt{\frac{2GM_s}{r_0}} = 42.1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

要使物体到达点 C 时具有 $42.1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度,可以利用地球公转的速度,让物体沿地球公转的方向发射. 地球公转的速度 v'_1 可由下式求得

$$v'_1 = \sqrt{\frac{GM_s}{r_0}} = 29.7 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以物体到达点 C 相对于地球的速度应为

$$v = v'_2 - v'_1 = (42.1 \times 10^3 - 29.7 \times 10^3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 12.4 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

相对地球的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

这表示在物体脱离地球引力作用之后还必须具有动能 E_k 才能脱离太阳的引力作用,逃逸出太阳系.

另外还必须考虑物体在由地面到达点 C 的过程中克服地球引力所作的功. 这一点已在例题 3-4 中讨论过,物体至少应具有第二宇宙速度 v_2 , 才能脱离地球的引力范围,相应的动能为

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

所以,要使在地面发射的物体既要脱离地球引力,又能脱离太阳引力,必须具有的最小动能 E_{k3} 应为 E_k 与 E_{k2} 之和,即

$$E_{k3} = E_k + E_{k2}$$

由此可算得第三宇宙速度

$$\begin{aligned} v_3 &= \sqrt{v^2 + v_2^2} = \sqrt{(12.4 \times 10^3)^2 + (11.2 \times 10^3)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 16.7 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

如果发射物体的初速度等于第一宇宙速度,物体将在围绕地球的圆形轨道上运行.如果发射物体的初速度大于第一宇宙速度而小于第二宇宙速度,物体将沿椭圆形轨道绕地球运行,成为人造地球卫星.如果发射物体的初速度大于第二宇宙速度而小于第三宇宙速度,则在地球引力范围以内其运行轨道相对地球为双曲线,脱离地球引力以后,其运行轨道为绕太阳的椭圆,成为太阳的一个行星.当发射物体的初速度达到第三宇宙速度时,在地球引力范围以内,其运行轨道相对地球为双曲线,脱离地球引力以后其运行轨道相对太阳为抛物线,它将脱离太阳的引力束缚,飞向太阳系以外的宇宙空间去.

§ 3.6 碰 撞

当两个质点或两个物体互相接近时,在较短的时间内通过相互作用,它们的运动状态发生了显著的变化,这一现象称为碰撞.这种相互作用能够产生各种各样的结果,例如可能使两个物体各自的动量和能量发生变化,也可能使两个物体结合在一起.此外,当两个微观粒子发生碰撞时,还可能产生新的粒子.

日常生活中属于碰撞的物理现象是很多的,如锻打、打桩、球的撞击、人跳上车或跳下车,以及子弹射入物体内部等.在列举的这些现象中,发生碰撞的物体都是直接接触的.但是碰撞现象并不限于直接接触的物体,不直接接触的物体之间也会发生碰撞.例如,核反应过程大都属于碰撞过程,在这些碰撞过程中参与碰撞的粒子不一定直接接触.

实际上,现代物理学所研究的碰撞问题大多是微观粒子之间的碰撞,粒子间的相互作用是非接触作用.例如,分子或原子相互接近时,由于双方很强的相互斥力,迫使它们在接触前就偏离了原来的运动方向而分开,这通常称为散射.在散射问题中,人们所关心的往往是散射粒子的角分布,以及散射前后粒子各种性质的变化,而角分布等实验观测都是在离靶子“很远”的地方进行的,因此人们通常所关心的是离靶子“很远”的地方的渐进行为.在微观物理学中,粒子之间的相互作用十分复杂,而且往往不能直接观测,人们主要就是通过各种类型的散射实验来研究粒子之间的相互作用,以及它们的内部结构.

碰撞的特点之一是物体的位移非常微小,一般可以认为碰撞过程中物体来不及发生位移.另一特点是相互作用的碰撞力极大,其它非碰撞力、摩擦力等与之相比可

以忽略不计。

在碰撞过程中,由于物体之间的互相撞击力相当大,作用时间又非常短,以至作用于物体上的外力,如重力、摩擦力以及空气阻力等相对很小,因此动量守恒定律是适用的。另外,能量守恒定律也总是适用的。这样,在许多情况下我们可以不知道碰撞过程的细节,而由这两个守恒定律原则上推知碰撞的结果。

尽管碰撞过程能量是守恒的,但参与碰撞的物体在碰撞前后的总动能却不一定保持不变。我们按照碰撞前后总动能是否变化,将碰撞现象分为两类:一类是总动能不变的碰撞,称为完全弹性碰撞;一类是总动能改变的碰撞,称为非完全弹性碰撞。象牙球之间的碰撞,玻璃球之间的碰撞以及优质钢制成的球之间的碰撞,都可看成完全弹性碰撞。原子、原子核和粒子之间的碰撞有些是完全弹性碰撞,并且是迄今所知的惟一真正的完全弹性碰撞。除此之外,一般的碰撞都属于非完全弹性碰撞。在非完全弹性碰撞中,有一种特殊情形,那就是两个物体碰撞之后结合为一体了,这种碰撞称为完全非弹性碰撞。如两个橡皮泥小球的碰撞,人跳上车,正、负离子碰撞后结合成分子等,都属于完全非弹性碰撞。

完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞是碰撞问题中的两种极端情形,我们通过分析这两种碰撞的例子,了解碰撞现象的一些规律,以及处理这类问题的基本方法。

例 3-8 弹性碰撞。碰撞前后两物体总动能没有损失的碰撞叫做弹性碰撞。两个台球的碰撞近似于这种碰撞。两个分子或两个粒子的碰撞,如果没有引起内部的变化,也都是弹性碰撞。设想两个球的质量分别为 m_1 和 m_2 ,沿一条直线分别以速度 v_{10} 和 v_{20} 运动。求它们发生弹性的对心碰撞后的速度各如何。

解 以 v_1 和 v_2 分别表示两球碰撞后的速度。对心碰撞后二者的速度方向还沿着原来运动的直线方向。由动量守恒定律可得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

由于是弹性的碰撞,总动能应保持不变,即

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

联立解这两个方程式可得

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20} \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \quad (4)$$

为了明确这一结果的意义,我们举两个特例.

特例 1 两个球的质量相等,即 $m_1 = m_2$. 这时以上两式给出

$$v_1 = v_{20}, \quad v_2 = v_{10}$$

即碰撞结果是两个球互相交换速度. 如果原来一个球是静止的,则碰撞后它将接替原来运动的那个球继续运动. 打台球或打克郎棋时常常会看到这种情况. 同种气体分子的相撞也常设想为这种情况.

特例 2 一球的质量远大于另一球,如 $m_2 \gg m_1$, 而且大球的初速为零,即 $v_{20} = 0$. 这时,(3)式和(4)式给出

$$v_1 = -v_{10}, \quad v_2 \approx 0$$

即碰撞后大球几乎不动而小球以原来的速率返回. 乒乓球碰铅球,网球碰墙壁(这时大球是墙壁固定于其上的地球),拍皮球时球与地面的相碰都是这种情形,气体分子与容器壁的垂直碰撞,反应堆中中子与重核的完全弹性对心碰撞也是这样的实例.

例 3-6 完全非弹性碰撞. 两个物体碰撞后如果不再分开,这样的碰撞叫完全非弹性碰撞. 设有两个物体,它们的质量分别为 m_1 和 m_2 , 碰撞前二者速度分别为 v_1 和 v_2 , 碰后合在一起,求碰撞后的共同速度.

解 对于这样的两物体系统,由于无外力作用,所以总动量守恒. 以 V 表示碰后二者的共同速度,则由动量守恒定律可得

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

由此求得碰后的共同速度

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

在完全非弹性碰撞中所损失的动能并没“消灭”,而是转化为其它形式的能量了. 例如,转化为分子运动的能量即物体的内能了. 在粒子物理实验中,常常利用粒子的碰撞引起粒子的转变来研究粒子的行为和规律.

思 考 题

3-1 在下列几种情况中,机械能守恒的系统是:

- (1) 当物体在空气中下落时,以物体和地球为系统.
- (2) 当地球表面物体匀速上升时,以物体和地球为系统(不计空气阻力).

(3) 子弹水平地射入放在光滑水平桌面上的木块内,以子弹与木块为系统.

(4) 当一球沿光滑的固定斜面向下滑动时以小球和地球为系统.

3-2 请判断下述说法的正误:

(1) 不受外力作用的系统,它的动量和机械能必然同时都守恒.

(2) 内力都是保守力的系统,当它所受的合外力为零时,它的机械能必然守恒.

(3) 只有保守内力作用的系统,它的动量和机械能必然都守恒.

3-3 两个质量相同的猴子 A 和 B,各抓住跨过轻质定滑轮的轻绳的一端,由同一高度同时从静止开始攀绳往上爬,其中猴子 A 的攀绳速度始终是猴子 B 的两倍.问猴子 A 是否将先爬到顶点?为什么?

3-4 木架上放着一桶开水,其龙头下放着一只木桶,整个装置放在大的磅秤上.当打开龙头,水就流进木桶.问在打开龙头后的过程中,磅秤的读数与龙头打开前相比,将发生怎样的变化?

3-5 当几个力同时作用于多个物体组成的体系时,“合力”(指几个力的矢量和)的功是否等于各个分力所作功的和?试举例证明你的观点.

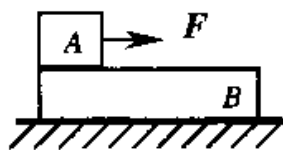


图 3.17

3-6 在水平桌面上放着一块木板 B,在木板的一端放着木块 A,木块 A 在恒力 F 作用下沿木板 B 运动,如图 3.17 所示.问在下列两种情况下,木块 A 从木板一端移到

另一端的过程中,因摩擦而放出的热量及 F 所作的功是否相同?(1) 木板固定在桌面上不动;(2) 木板在桌面上无摩擦的滑动.

3-7 一人在帆船上用电动鼓风机正对帆鼓风,帆船是前进还是后退?为什么?

3-8 人从大船上容易跳上岸,而从小舟上不容易跳上岸了,这是为什么?

3-9 质点的动量与动能是否与惯性系的选取有关?功是否与惯性系有关?质点的动量定理和动能定理是否与惯性系有关?请举例说明.

3-10 在弹性限度内,如果将弹簧的伸长量增加到原来的两倍,那么弹性势能是否也增加到原来的两倍?

3-11 有两个同样的物体,处于同一位置,其中一个水平抛出,另一个沿斜面无摩擦地自由滑下,问哪一个物体先到达地面?到达地面时两者速率是否相等?

3-12 在弹性碰撞中,有哪些量保持不变,在非弹性碰撞中又有哪些量保持不变?

3-13 一人抓住橡皮绳的下端悬在空中,使橡皮绳由静长 a 伸长到 b ,试问,若他攀绳缓慢上升至顶,需作少功?如果他攀着不可伸长的长为 b 的绳缓慢上升至顶,需作多少功?

习 题

3-1 质量为 60kg 的人以 8km/h 的速度从后面跳上一辆质量为 80kg ,速度为 2.9km/h 的小车,试问小车的速度将变成多大?如果人迎面跳上小车,结果又怎样?

3-2 一机车的功率为 $1.5 \times 10^6 \text{W}$,在满功率的情况下,于 3min 内将列车的速率由 10m/s 加速到 20m/s ,试求:(1)列车的质量;(2)列车的速率于时间的关系;(3)加速列车的力与时间的关系;(4)列车的经过的路程.

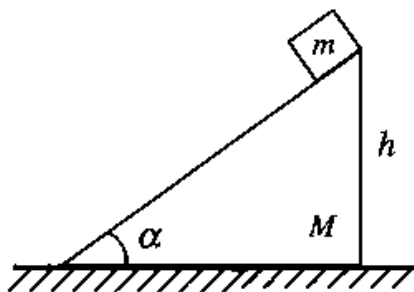


图 3.18

3-3 如图 3.18 所示,质量为 m 的木块放在一质量为 M 的楔的斜面上,楔放在一水平桌面上,开始时,

木块和楔都处于静止,当木块沿斜面下滑时,楔将沿水平桌面运动,设所有的表面都是光滑的,木块从离桌面 h 高度处开始下滑,试求:当它碰到桌面时,楔的速度为多大?

3-4 一木块质量为 $M = 1\text{kg}$,置于水平面上,一质量 $m = 2\text{g}$ 的子弹以 500m/s 的速度水平击穿木块,速度减为 100m/s ,木块沿水平方向滑行了 20cm ,求(1)木块与水平面的摩擦系数;(2)子弹的动能减少多少.

3-5 高空作业时系安全带是非常必要的.假如一质量为 51.0kg 的人,在操作时不慎从高空竖直跌落下来,由于安全带的保护,最终使他被悬挂起来.已知此时人离原处的距离为 2.0m ,安全带的弹性缓冲作用时间为 0.50s .求安全带对人的平均冲力.

3-6 质量为 $m = 0.5\text{kg}$ 的质点,在 xoy 坐标平面内运动,运动方程为 $x = 5t$, $y = 0.5t^2$ (SI).求从 $t = 2\text{s}$ 到 $t = 4\text{s}$ 这段时间内,外力对质点做的功.

3-7 设地球质量为 M ,万有引力常数为 G ,一质量为 m 的宇宙飞船在返回地球时,可以认为它只是在地球引力场中运动(此时发动机已关闭).当它从距地球中

心 R_1 处下降到 R_2 处时, ($R_2 < R_1$) 它的动能增加了多少?

3-8 一个质点在几个力同时作用下的位移为: $\Delta r = 6i - 8j + 7k(m)$, 其中一个力为恒力 $F = -8i - 6j + 7k(N)$, 则这个力在该位移过程中所作的功是多少.

3-9 质量为 m 的物体, 由水平面上点 O 以初速度为 v_0 抛出, v_0 与水平面成仰角 α . 若不计空气阻力, 求: (1) 物体从发射点 O 到最高点的过程中, 重力的冲量; (2) 物体从发射点到落回至同一水平面的过程中, 重力的冲量.

3-10 一人从 10.0m 深的井中提水, 起始桶中装有 10.0kg 的水, 由于水桶漏水, 每升高 1.00m 要漏去 0.20kg 的水. 水桶被匀速地从井中提到井口, 求人所作的功.

3-11 如图 3.19, 有一弹簧劲度系数为 k , 水平放置于桌面上, 一端固定, 另一端联结一质量为 m 的物体, 物体与桌面的摩擦因数为 μ_k . 已知当弹簧为原长时物体具有速度 v_0 , 问此后在物体移动距离为 l 的过程中

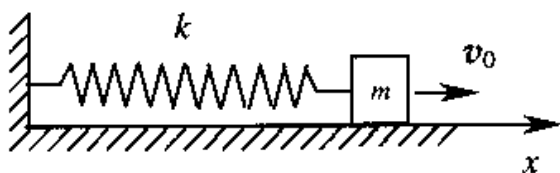


图 3.19

- (1) 摩擦力作多少功?
- (2) 作用在物体上的弹性力作多少功?
- (3) 作用在物体上的其它力作多少功?
- (4) 对物体作的总功是多少?

3-12 在水平地面上有一质量 $m = 10\text{kg}$ 的木箱, 其上作用一水平拉力 F , 木箱由静止开始运动. 若拉力的大小随时间的变化的关系如图, 并已知木箱与地面的摩擦因数 $\mu = 0.2$, 试求:

- (1) $t = 4\text{s}$ 时刻木箱速度.
- (2) $t = 7\text{s}$ 时刻木箱速度.
- (3) $t = 6\text{s}$ 时刻木箱速度.

3-13 如图 3.20, 劲度系数为 k 的轻弹簧竖直放置, 弹簧上端与质量为 M 的水平板相连, 下端固定在地面上. 一质量为 m 的粘性泥球自板上方 h 处自由下落到板上, 求以后球与木板一起向下运动的最大位移?

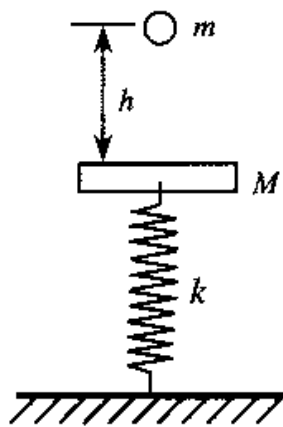


图 3.20

3-14 设在地球表面附近, 一初质量为 $5.00 \times 10^5 \text{kg}$ 的火箭, 从尾部喷出气体的速率为 $2.00 \times 10^3 \text{m/s}$. 试问: (1) 每秒需喷出多少气体才能使火箭最初向上的加速度大小为 4.90m/s^2 ;

(2) 若火箭的质量比为 6.00, 求该火箭的最后速率.

3-15 一质量为 m 的地球卫星, 沿半径为 $3R_E$ 的圆轨道运动, R_E 为地球的半径. 已知地球的质量 m_E . 求:

- (1) 卫星的动能.
- (2) 卫星在地球引力场中的引力势能.
- (3) 卫星的机械能.

3-16 倾角为 α 的斜面与物体之间的摩擦因数为 μ . 当我们沿斜面向上给物体以冲量, 使物体在 A 点产生初速度 v_0 时, 问物体是否能返回点? 如果能返回 A , 问物体返回 A 点时的速率 v 等于多少?

3-17 单位长度质量为 ρ_l 的柔软绳索盘放在水平台面上. 用手将绳索的一端以恒定速率 v_0 向上提起, 求当提起高度为 x 时手的拉力.

3-18 火箭在重力场中运动, 初始质量为 $2.94 \times 10^6 \text{ kg}$, 第一级所带燃料为 $2.15 \times 10^6 \text{ kg}$, 平均排气速度是 2.8 km/s . 火箭从地面开始垂直向上发射, 在 161 s 后燃料烧尽, 求此时火箭的速率. 设重力加速度恒定.

3-19 一质量为 m_1 的杂技演员, 从蹦床上沿竖直方向跳起. 当他上升到某一高度时, 迅速抱起边上栖木上的猴子, 结果他又上升了相同的高度然后落下. 已知猴子的质量为 m_2 . 试求此高度 H 与他不抱猴子所能达到的最大高度 H_0 之比.

3-20 一发炮弹以初速率 $v_0 = 160 \text{ m/s}$, $\theta = 30^\circ$ 的仰角被射出, 当它达到最高点时突然爆炸, 炸成质量相同的两块, 其中一块以速率 $v_1 = 60 \text{ m/s}$ 竖直下落, 求另一块的落地点与炮弹射出点之间的距离.

3-21 一质量 $m_1 = 50 \text{ kg}$ 的人 A 手里拿着一质量 $m = 5.0 \text{ kg}$ 的小球以 $v_1 = 1.2 \text{ m/s}$ 的速率在光滑冰面上沿直线滑行, 而另一质量 $m_2 = 45 \text{ kg}$ 的人 B 以 $v_2 = 0.8 \text{ m/s}$ 的速率向 A 对面滑来, 为避免碰撞, A 把球以相对于他的速率 u 向 B 水平抛出, 让 B 接住. 试问至少应多大?

3-22 用铁锤把钉子敲入墙面木板. 设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比. 若第一次敲击, 能把钉子钉入木板 $1.00 \times 10^{-2} \text{ m}$. 第二次敲击时, 保持第一次敲击的速度, 那第二次能把钉子钉多深?

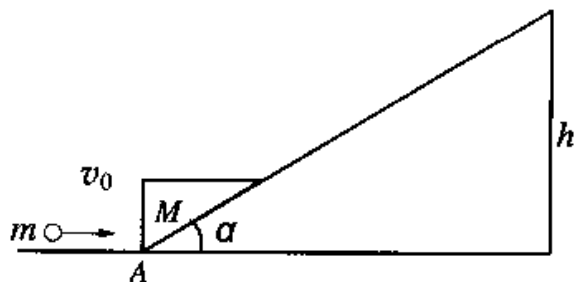


图 3.21

3-23 如图 3.21, 一质量为 M 的物块放

置在斜面的最底端 A 处,斜面的倾角为 α ,高度为 h ,物块与斜面的滑动摩擦因数为 μ ,今有一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿水平方向射入物块并留在其中,且使物块沿斜面向上滑动,求物块滑出顶端时的速度大小.

3-24 设两个粒子之间的作用力为排斥力,并随它们之间的距离 r 按 $F = k/r^3$ 的规律而变化,其中 k 是常量.试求两粒子相距为 r 时的势能.(设力为零的地方势能为零.)

3-25 一质量为 m 的质点,系在细绳的一端,绳的另一端固定在平面上.此质点在粗糙的水平面上作半径为 r 的圆周运动.设质点的最初速度为 v_0 .当它运动一周时,其速率为 $v_0/2$.求:(1)摩擦力作的功;(2)滑动摩擦因数;(3)在静止之前质点运动了多少圈?

3-26 如图 3.22, A 和 B 两块板用一轻弹簧连接起来,它们的质量分别为 m_1 和 m_2 .问在 A 板上需加多大的压力,方可使力停止作用后,恰能使 A 在跳起来时 B 能稍被提起.(弹簧的劲度系数为 k)

3-27 如图 3.23,半径为 R 的半球固定在地面上,在它的顶部 A 处有一滑块从静止开始沿光滑球面滑下.试问:当 θ 等于多少时,滑块离开球面?

3-28 一个速率 v_0 质量 m 的运动粒子,与一质量为 am 的静止靶粒子作完全弹性对心碰撞,试问 a 的值为多大时,靶粒子所获得的动能最大?

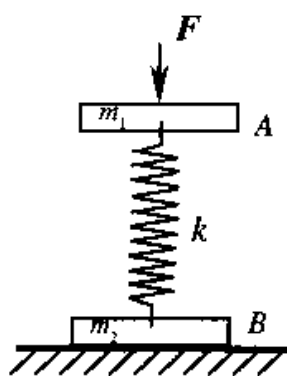


图 3.22

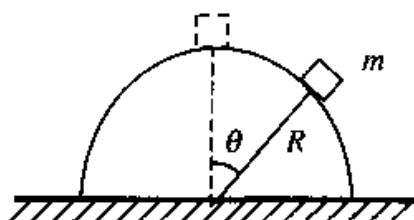


图 3.23

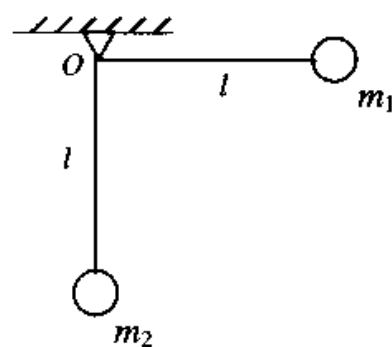


图 3.24

3-29 如图 3.24,质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球,用两个长为 $l = 1\text{m}$ 的轻绳悬挂起来.现将 m_1 拉到水平位置,放手与 m_2 作完全弹性对心碰撞,试求随后两者各弹多高?

第 4 章 刚体的转动

前面讨论了动量守恒定律和机械能守恒定律. 在那里, 这些概念和规律在多数情况下都是就质点或少数几个质点组成的质点系提出并应用的. 自然界的物体是多种多样的, 其运动也各不相同. 本章将介绍一种特殊的质点系——刚体所遵循的动力学规律. 重点只讨论刚体的定轴转动这种简单情况, 讨论力矩作用的瞬时规律, 刚体转动过程中的功能关系. 然后在讨论力矩对时间的积累效应的基础上, 介绍描述刚体转动特征的重要物理量——角动量, 进而导出另一条重要的守恒定律——角动量守恒定律.

§ 4.1 刚体的定轴转动

一、平动和转动

刚体运动时, 若刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线, 如图 4.1(a), 刚体的这种运动叫做平动. 例如升降机的运动, 气缸中活塞的运动, 机床上车刀的运动等, 都是平动. 显然, 刚体平动时, 在任意一段时间内, 刚体内所有质点的位移都是相同的; 在任意瞬时, 刚体内各质点的速度、加速度都是相同的; 刚体内各质点的运动轨迹也都是相同的.

刚体运动时, 若刚体内各个质点都绕同一直线作圆周运动, 如图 4.1(b), 刚体的这种运动叫做转动. 例如机器上飞轮的运动, 车床上工件的运动, 地

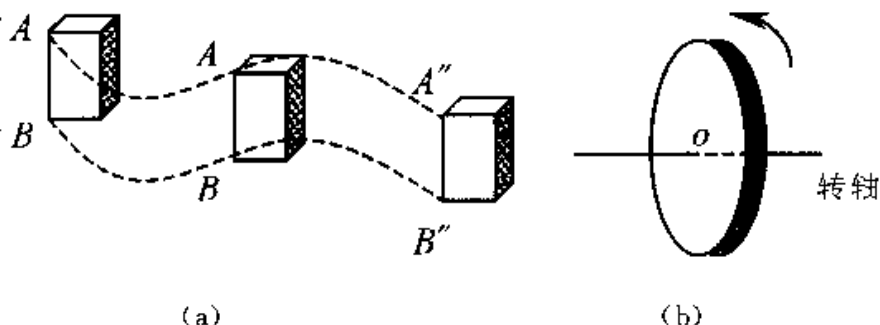


图 4.1 刚体的平动和转动

球的自转运动等, 都是转动. 这一直线叫转轴, 如果转轴的位置或方向随时间改变

(如旋转陀螺), 这个转轴称为瞬时转轴, 此时刚体的运动叫做刚体的非定轴转动; 如果转轴的位置或方向固定不动而不随时间改变(如机器上飞轮的转动), 这个转轴称为固定转轴, 此时刚体的运动叫做刚体的定轴转动.

刚体的一般运动比较复杂, 但可以证明, 刚体的一般运动可以看成是平动和转动的合成运动. 如图 4.2 所示, 一密度均匀的圆盘在水平面上作无滑动的滚动. 从图中可以看出, 除圆盘的中心 O 沿直线向前移动外,

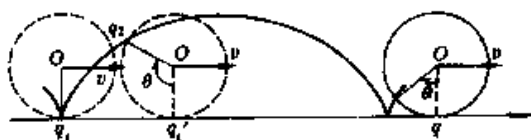


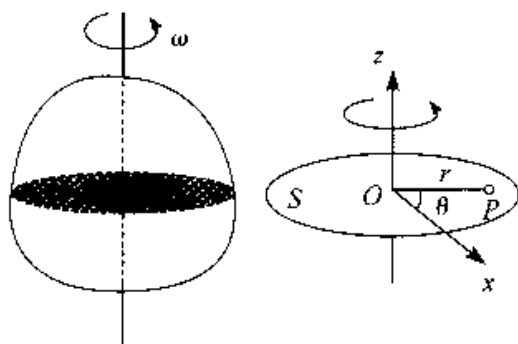
图 4.2 刚体的一般运动

盘上其余各点既向前移动又绕通过圆盘中心 O 且垂直圆盘的轴转动. 取圆盘上一点 q , 它在 Δt 时间内, 由位置 q_1 运动到位置 q_2 , q 的运动可看成是先由位置 q_1 向前移动到位置 q'_1 , 然后绕通过圆盘中心 O 且垂直盘面的轴转过角 θ , 到达位置 q_2 . 因为圆盘是一个刚体, 所以圆盘上各点向前移动的情况与圆盘中心(即质心)的运动情况相同.

二、刚体的定轴转动

1. 角坐标

设有一刚体绕固定轴 OZ 转动, 如图 4.3(a) 所示, 刚体上各点都绕固定轴 OZ 作圆周运动, 为了描述刚体绕定轴的转动, 我们在刚体内选取一个垂直于 OZ 轴的平面 S 作为参考平面, 并在此参考平面上取一参考直线, 且把这参考直线作为坐标轴 Ox , 把转轴与参考平面的交点作为坐标原点 O , 如图 4.3(b) 所示. 这样, 刚体的方位可由原点 O 到参考平面 S 上的任一点 P 的径矢 r 与 Ox 轴的夹角 θ 确定. 角 θ 也叫角坐标. 刚体绕定轴转动时, 角坐标 θ 是时间 t 的函数, 即



(a) (b)
图 4.3 刚体绕定轴转动

$$\theta = \theta(t)$$

这就是刚体绕定轴转动的运动学方程. 角坐标规定: 从上向下看, 当径矢 r 从轴 Ox 开始沿逆时针方向转动时, 角坐标 θ 为正值; 当径矢 r 从 Ox 轴开始沿顺时针方向转

动时,角坐标 θ 为负值. 角坐标的单位名称为弧度,用符号 rad 表示.

2. 角速度

刚体在时刻 t 的角速度等于刚体角坐标对时间的一阶导数,即

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (4-1)$$

ω 是描述绕定轴转动刚体转动快慢和转动方向的物理量. 一般规定,如果刚体沿 θ 角正方向转动,即 $d\theta > 0$,则角速度 ω 为正;反之为负. 如图 4.4 所示.

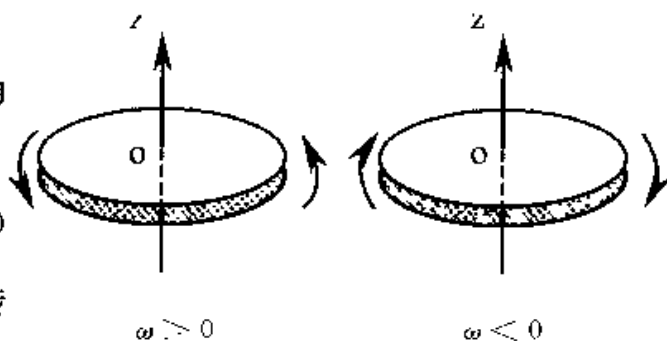


图 4.4 绕定轴转动刚体,用 ω 的正负来表示其转动方向

在一般情况下,刚体的转轴在空间的方位是随时间改变的(如旋转陀螺),这时刚体的转动方向就不能用角速度的正负来表示,而需要用角速度矢量 ω 来表示. 角速度矢量 ω 的方向可以由右手法则确定,如图 4.5 所示,把右手的拇指伸直,其余四指弯曲,并使弯曲的方向与刚体转动方向一致,这时拇指所指的方向就是角速度矢量 ω 的方向. 可在转轴上画一有向线段,使其长度按一定比例代表角速度的大小,它的方向符合右手法则. 角速度的单位名称为弧度每秒,用符号 S^{-1} 或 $\text{rad} \cdot S^{-1}$ 表示.

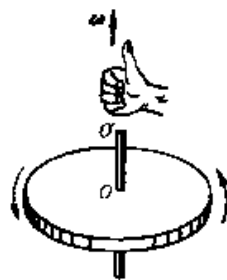


图 4.5 角速度矢量

3. 角加速度

刚体绕定轴转动时,如果其角速度随时间 t 发生变化,刚体就具有了角加速度. 角速度 ω 对时间的一阶导数就是绕定轴转动刚体的角加速度,用符号 β 表示,即

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4-2)$$

对于绕定轴转动的刚体,角加速度的方向也可以由其正负来表示. 在如图 4.6(a) 所示的情况下,角速度 ω_2 的方向与 ω_1 的方向相同,且 $\omega_2 > \omega_1$, $\Delta\omega > 0$, β 为正值,刚体作加速转动;在图 4.6(b) 所示的情况下

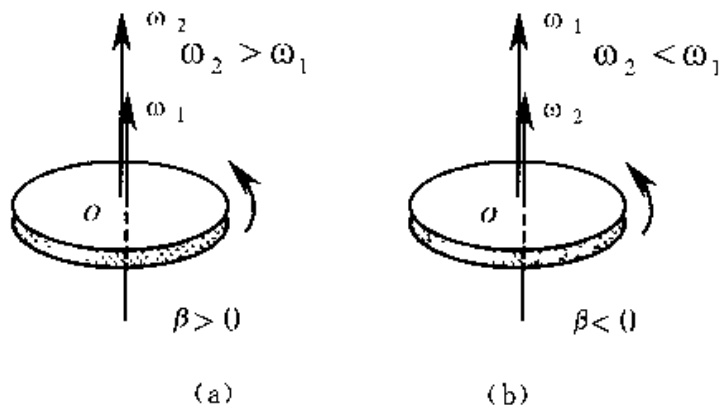


图 4.6 定轴转动的角加速度

$\omega_2 < \omega_1$, 那么 $\Delta\omega < 0$, β 为负值, 则刚体作减速转动。

4. 刚体的匀变角速转动

当刚体绕定轴转动时, 如果角加速度 $\beta = 0$, ω 为一常量, 这种运动称为匀速转动; 如果角加速度 β 为一常量, 则这种运动称为匀变速转动。由式(4.1)和式(4.2)可求得刚体绕定轴作匀速转动和匀变速转动时角位移、角速度、角加速度与时间之间的关系式。为便于记忆, 现将这些公式与质点的直线运动公式列表 4-1 对比如下:

表 4-1 刚体定轴转动与质点直线运动的对比

质点直线运动	刚体定轴转动
运动方程 $x = x(t)$	运动方程 $\theta = \theta(t)$
速度 $v = \frac{dx}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
a 为常数时 $v = v_0 + at$	β 为常数时 $\omega = \omega_0 + \beta t$
$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$

3. 角量与线量的关系

当刚体绕定轴转动时, 刚体内所有的点都绕定轴作圆周运动, 而且每一个组成刚体的质点的角加速度相同, 角速度也相同。由圆周运动的讨论可知角量与线量有如下关系

$$v = r\omega \quad (4-3)$$

$$a_t = r\beta \quad (4-4)$$

$$a_n = r\omega^2 \quad (4-5)$$

由以上三式, 可以看出, 对绕定轴转动的刚体来说, 距转动轴越远处, 其线速度越大, 切向加速度和法向加速度也越大。

例 4-1 一飞轮在时间 t 内转过角度 $\theta = a + bt^2 + ct^3$, 式中 a, b, c 都是常量, 求它的角速度和角加速度。

解 飞轮上某点的角位置 $\theta = a + bt^2 + ct^3$, 将此式对时间 t 求一阶导数, 即得

飞轮的角速度为

$$\omega = \frac{d}{dt}(a + bt^2 + ct^3) = 2bt + 3ct^2$$

由角加速度定义得

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(2bt + 3ct^2) = 2b + 6ct$$

可见,飞轮在作变加速转动.

例 4-2 在高速旋转的微型电动机里,有一圆柱形转子可绕垂直其横截面通过中心的轴转动.开始时其角速度 $\omega_0 = 0$,经过 300 s 后,其转速达到 $18000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$. 已知转子的角加速度 β 与时间 t 成正比,问在这段时间内,转子转过多少转?

解 由题意可知,转子的角加速度是时间 t 的函数.设转子的角加速度为

$$\beta = kt$$

其中 k 为比例常数,由角加速度的定义及上式,得

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = kt$$

即

$$d\omega = kt dt$$

两边积分得

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t kt dt$$

即

$$\omega = \frac{1}{2}kt^2 \quad (1)$$

$t = 300 \text{ s}$ 时, $\omega = 18\,000 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1} = 18\,000 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 600\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 由式(1)得

$$k = \frac{2\omega}{t^2} = \frac{2 \times 600\pi}{300^2} (\text{rad} \cdot \text{S}^{-3}) = \frac{\pi}{75} (\text{rad} \cdot \text{S}^{-3})$$

于是,转子的角速度为

$$\omega = \frac{\pi}{150}t^2$$

由角速度的定义及上式有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{150}t^2$$

得

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{\pi}{150}t^2 dt$$

有

$$\theta = \frac{\pi}{450}t^3$$

在 300 s 内, 转子转过的转数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi \times 450} (300)^3 = 3 \times 10^4 \text{ (圈)}$$

§ 4.2 转动定律

本节首先引入力矩的概念, 讨论刚体转动过程中, 转动惯性大小的量度, 最后讨论力矩的瞬时作用规律.

一、力矩

我们知道, 力是引起质点或刚体平动运动状态发生变化的原因. 对定轴转动的刚体, 外力对刚体转动的影响, 不仅与力的大小有关, 而且还与力的作用点的位置和力的方向有关, 即与力矩有关. 力矩才是引起转动物体运动状态发生变化的原因.

图 4.7 是转动刚体的一个横截面, 它可绕通过点 O 且垂直于该平面的转轴 OZ 旋转. 设作用在刚体内点 P 上的力 F 在此平面内 (因为不在平面内的力, 可以分解为在平面内的力和平行于转动轴的力, 只有平面内的分力才对刚体转动产生影响). 从转轴与截面的交点 O 到力 F 作用线的垂直距离 d 叫做力对转轴的力臂, 力 F 的大小和力臂 d 的乘积, 就叫做力 F 对转轴的力矩, 用 M 表示, 即

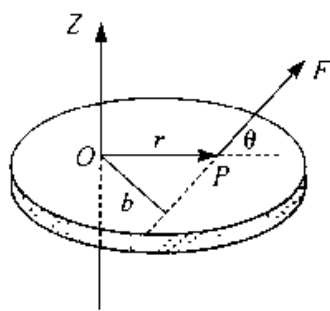


图 4.7 力矩

$$M = Fd \quad (4-6a)$$

由图 4.7 可以看出, r 为由点 O 到力 F 的作用点 P 的径矢, θ 为径矢 r 与力 F 之间的夹角. 由于 $d = r \sin \theta$, 故上式为

$$M = Fr \sin \theta \quad (4-6b)$$

力矩不仅有大小, 而且有方向, 对于绕定轴转动的刚体, 力矩的正、负反映了力矩的矢量性. 力矩的正、负由右螺旋法则确定, 即从轴上端向下端看, 若力 F 使物体沿逆时针方向转动, 则力矩 M 为正, 即 $M > 0$; 反之为负. 由于力对转轴的力矩或为正, 或为负, 只有这两种情况, 因此一般可视为代数量.

由矢量的矢积定义, 力矩矢量 M 可用径矢 r 和力 F 的矢积表示, 即

$$M = r \times F \quad (4-7)$$

M 的大小为

$$M = rF \sin\theta$$

M 的方向垂直于 r 与 F 所构成的平面, 也可由右手法则确定: 把右手拇指伸直, 其余四指弯曲, 四指的方向是由径矢 r 通过小于 180° 的角 θ 转向力 F 的方向, 这时拇指所指的方向就是力矩的方向. 如图 4.8 所示.

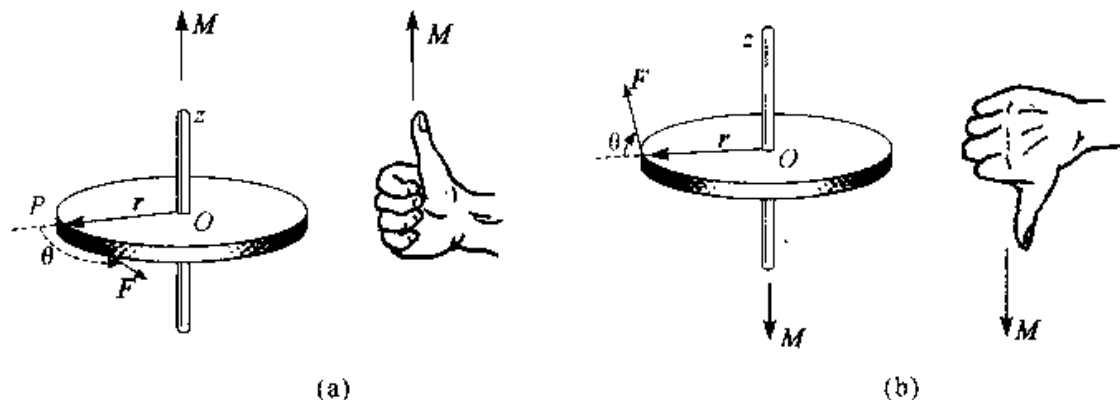


图 4.8 确定力矩方向的右手法则

在定轴转动中, 如图 4.9 中所示, 如果有几个外力同时作用在同一刚体上, 它们的作用可以等效于一个力矩的作用, 这个力矩叫做这几个力的合力矩, 对于定轴转动的刚体, 由于规定了力矩的正、负, 所以它们的合力矩的量值等于这几个力矩的代数和. 在图 4.9 中, F_1 、 F_2 、和 F_3 三个力的合力矩的量值为

$$M = -F_1 r_1 \sin\theta_1 + F_2 r_2 \sin\theta_2 + F_3 r_3 \sin\theta_3$$

在上式中, 若 $M > 0$, 合力矩的方向沿 OZ 轴正向; 若 $M < 0$, 合力矩的方向沿 OZ 轴的负向.

刚体可以看成是由许许多多质点组成, 刚体内各质点间还存在相互作用的内力, 对于定轴转动的刚体, 这些内力的合力矩又等于多少?

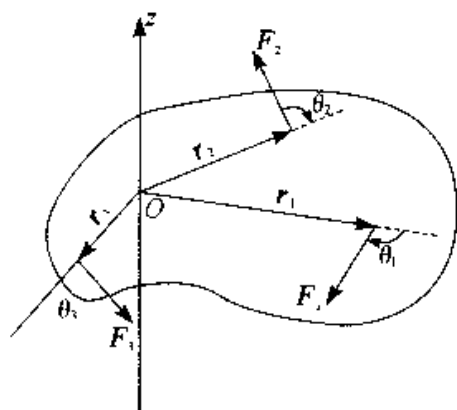


图 4.9 几个力的合力矩

设质点 i 和质点 j 间相互作用力在与转轴 OZ

垂直的平面内, 且分别为 f_i 和 f_j , 它们的大小相等、方向相反, 且在同一直线上, 即 $f_i = -f_j$, 如图 4.10 所示. 因为

$$r_i \sin\theta_i = r_j \sin\theta_j = d$$

所以, 合力矩为

$$M = f_{\mu} r_j \sin\theta_j - f_{\nu} r_i \sin\theta_i = 0$$

上式说明,沿同一作用线的大小相等,方向相反的两个质点间相互作用力对转轴的合力矩为零.因为刚体内质点间的作用力总是成对出现,且大小相等、方向相反,作用在同一直线上,所以刚体内各质点间的作用力对转轴的合力矩为零.

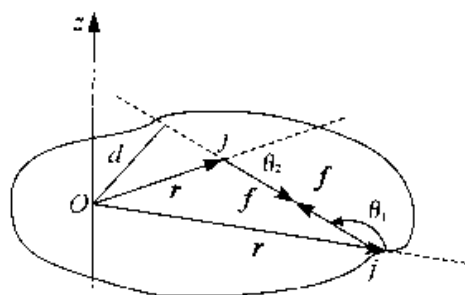


图 4.10 内力对转轴的力矩

二、定轴转动定律

刚体可看成由许许多多质点组成,当刚体绕 OZ 轴转动时,刚体上每一个质点都在绕 OZ 轴作圆周运动.如图 4.11 所示,在刚体上任取一点 P ,其质量为 Δm_i ,半径为 r_i (相应的位矢为 r_i).设刚体绕定轴转动的角速度和角加速度分别为 ω 和 β ,质点 P 受到两类力的作用:一类是来自刚体以外一切力的合力,用 F_i 表示;另一类是来自刚体内各质点作用的合力,用 f_i 表示,称为内力.为了简化讨论,我们假定外力 F_i 和内力 f_i 都在与 OZ 轴垂直的同一平面内.

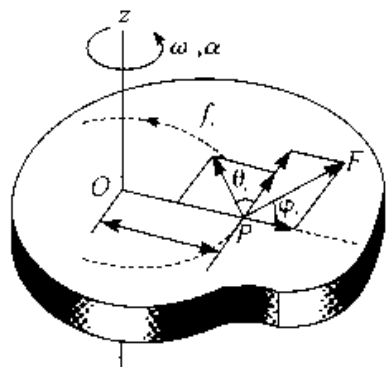


图 4.11 转动定律

根据牛顿第二定律,质点 P 的运动方程为

$$F_i + f_i = \Delta m_i a_i$$

式中 a_i 是质点 P 的加速度.如果以 F_{τ} 和 f_{τ} 分别表示外力 F_i 和内力 f_i 在切向的分力, $F_i \sin\varphi_i$ 和 $f_i \sin\theta_i$ (F_i 和 f_i 在法向的分力对 OZ 轴力矩为零),那么质点的切向运动方程为

$$F_{\tau} + f_{\tau} = \Delta m_i a_{\tau} = \Delta m_i r_i \beta$$

式中 a_{τ} 为质点 P 的切向加速度,上式两边同乘以 r_i ,并对整个刚体求和,则有

$$\sum_i F_{\tau} r_i + \sum_i f_{\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2) \beta \quad (4-8)$$

等式左边第一项为所有作用在刚体上的外力对 OZ 轴力矩的总和,称为合外力矩,用 M 表示;第二项为所有内力对 OZ 轴力矩的总和,即 $\sum_i f_{\tau} r_i = 0$.这样,上式变为

$$M = (\sum_i \Delta m_i r_i^2) \beta$$

式中的 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 仅与刚体的形状、质量分布及转轴的位置有关,叫做转动惯量.对绕定轴转动的刚体,它是一恒量,用 J 表示,即

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (4-9)$$

所以

$$M = J\beta \quad (4-10)$$

式(4-10)表明,刚体绕定轴转动时,刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比,与刚体的转动惯量成反比,这个关系叫做定轴转动时刚体的转动定律,简称转动定律.它是求解刚体绕定轴转动问题的基本方程.

三、转动惯量

式(4-10)与描述质点运动的牛顿第二定律 $F = ma$ 具有相似的形式.外力矩 M 与外力 F 相对应,角加速度 β 与加速度 a 相对应,转动惯量 J 与质量 m 相对应.转动惯量的物理意义可以理解为:当以相同的力矩分别作用于两个绕定轴转动的不同刚体上时,它们所获得的角加速度一般是不相同的.转动惯量大的刚体所获得的角加速度小,转动惯量小的刚体所获得的角加速度大.即转动惯量愈大的刚体绕定轴转动的运动状态愈难以改变.由此可以看出,转动惯量是描述刚体定轴转动惯性大小的物理量.

由式(4-3)可以看出,转动惯量 J 等于刚体上各质点的质量与各质点到转轴的距离平方的乘积之和.如果刚体上的质点是连续分布的,则其转动惯量可以将求和变成积分计算.即

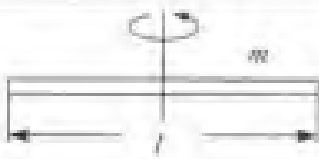

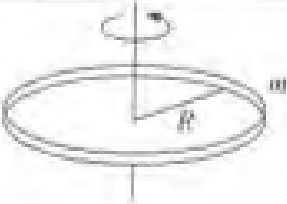
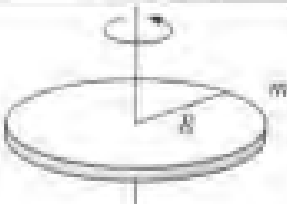
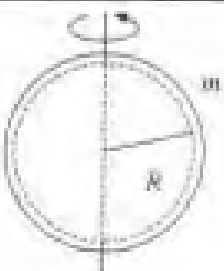
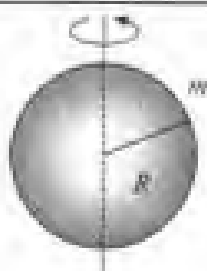
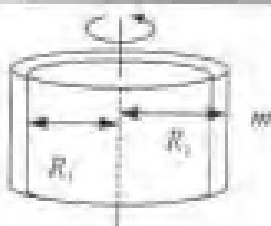
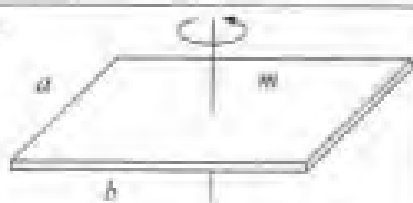
$$J = \int r^2 dm \quad (4-11)$$

在国际单位制中,转动惯量的单位名称是千克二次方米,符号是 $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$.

对形状复杂的刚体,用理论计算方法求转动惯量是很困难的,实际中多用实验方法测定.下面我们计算两种简单形状刚体的转动惯量.

刚体对轴的转动惯量大小取决于三个因素:(1)与刚体的体密度有关;(2)与刚体的质量对轴的分布情况有关;(3)与刚体转轴的位置有关.表4-2给出几种常用匀质刚体对某轴的转动惯量.

表 4-2 几种均匀刚体的转动惯量

细直杆  $J = \frac{1}{12} ml^2$	细直杆  $J = \frac{1}{3} ml^2$
薄圆环或薄圆筒  $J = mR^2$	圆盘或圆柱体  $J = \frac{1}{2} mR^2$
薄球壳  $J = \frac{2}{3} mR^2$	球体  $J = \frac{2}{5} mR^2$
圆筒  $J = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$	矩形薄平板  $J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

例 4-3 一长为 l , 质量为 m 的匀质细杆, 如图 4.12 所示, 试求该杆对通过中心并与杆垂直的轴的转动惯量。

解 以杆的中心 O 为坐标原点, 距 O 为 r 处取质量元 dm , 由式(4-11) 可得

$$J = \int r^2 dm$$

由于 $dm = \frac{m}{l} dr$, 有

$$J = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr$$

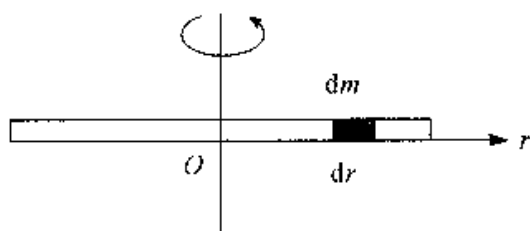


图 4.12 细直杆转动惯量的计算

如果以通过杆的一端, 并与杆垂直的轴, 可以用同样的方法计算出转动惯量为

$$J = \frac{m}{l} \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3} ml^2$$

例 4-4 一质量为 m 、半径为 R 的匀质圆盘, 求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量.

解 设圆盘的质量面密度为 σ , 如图 4.13 所示. 在圆盘上取一半径为 r , 宽为 dr 的圆环, 圆环的面积为 $2\pi r dr$. 此圆环质量元 $dm = \sigma 2\pi r dr$ 由式(4-11) 可得

$$J = \int r^2 dm = 2\pi\sigma \int r^3 dr$$

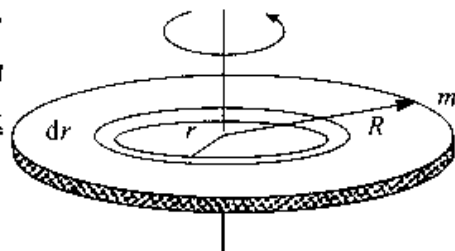


图 4.13 均匀圆盘转动惯量的计算

由于圆盘的半径为 R , 有

$$J = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} mR^2$$

四、平行轴定理

如图 4.14 所示, 设通过刚体质心的轴线为 z_c 轴, 刚体对这个轴线的转动惯量为 J_c . 如果另有一轴线 z 与轴线 z_c 平行, 且两平行轴之间的距离为 d , 刚体的质量为 m , 则刚体对通过 Z 轴的转动惯量为

$$J = J_c + md^2 \quad (4-12)$$

式(4-12) 叫做平行轴定理. 为了简单起见, 我们以均质细杆为例证明平行轴定理.

如图 4.15 所示, 以通过匀质细杆中心 c 并垂直于细杆的轴线为 z_c 轴, 平行轴为 z 轴, 两平行轴间距离为 d . 取 c 为坐标原点, 以匀质细杆长度方向为 ox 轴. 在距 z_c 轴为 x 处取一质量元 dm , 则质量元 dm 到轴的距离为 $r = d + x$. 按照转动惯量的定义, 细杆对轴的转动惯量为

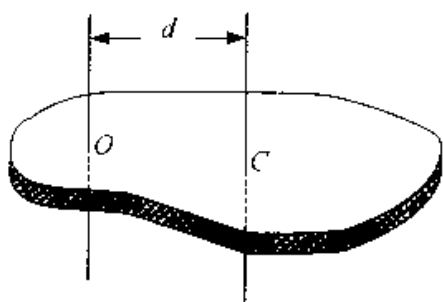


图 4.14 平行轴定理

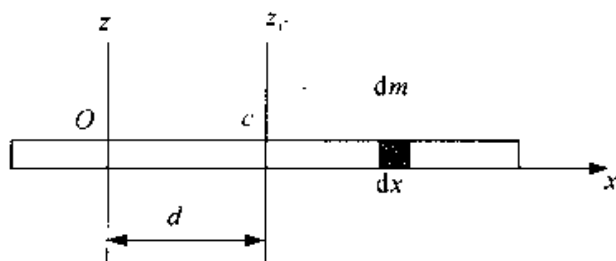


图 4.15 证明平行轴定理

$$\begin{aligned}
 J &= \int r^2 dm = \int (d+x)^2 dm \\
 &= \int x^2 dm + d^2 \int dm + 2d \int x dm \\
 &= J_c + md^2 + 0
 \end{aligned}$$

例 4-5 一轻绳跨过定滑轮 C, 滑轮视为匀质圆盘, 绳的两端分别悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体 A 和物体 B, 如图 4.16 所示, 设滑轮的质量为 m_3 , 半径为 R , 滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计, 绳与滑轮之间无相对滑动, 试求物体的加速度和绳中的张力。

解 由题意可知, 物体 A 和 B 是作平动, 它们的加速度 a 的大小取决于每个物体所受的合力。滑轮 C 作转动, 它的角加速度 β 取决于作用在它上面的合外力矩, 首先将三个物体隔离出来, 并作如图 4.16 所示的示力图, 分别列出滑轮及重物的动力学方程和辅助方程

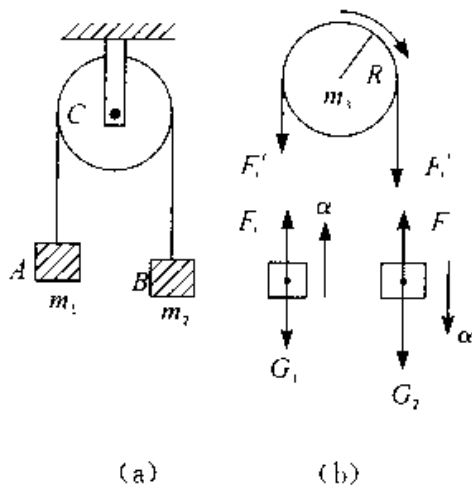


图 4.16

$$F'_{T_2} R - F'_{T_1} R = J\alpha$$

$$F_{T_1} - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - F_{T_2} = m_2 a$$

$$\beta = \frac{a}{R}$$

又因为 $J = \frac{1}{2} m_3 R^2$, $F_{T_1}' = F_{T_1}$, $F_{T_2}' = F_{T_2}$, 联立解得

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3}$$

$$F_{T_1} = \frac{2m_1m_2 + \frac{1}{2}m_3m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}$$

$$F_{T_2} = \frac{2m_1m_2 + \frac{1}{2}m_2m_3}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_3}$$

当不计滑轮质量, 即 $m_3 = 0$ 时, 有

$$F_{T_1} = F_{T_2} = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

此题的装置叫阿特伍德机, 是一种可用来测量重力加速度的简单装置

例 4-6 如图 4.17 所示, 一长为 L , 质量为 m 的匀质细杆竖直放置, 其下端与一固定铰链 O 相接, 并可绕其转动. 当其受到微小扰动时, 细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动. 试计算细杆转到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度.

解 细杆受到两个力作用, 一个是铰链对细杆约束力 F , 另一个是重力 P , 由于细杆是匀质的, 所以 P 可视为作用于细杆的重心. 当细杆以 O 为轴, 转到与竖直线成 θ 角时, 重力 P 对铰链 O 的力矩 $\frac{1}{2}mgL \sin\theta$, 而约束力 F 对铰链 O 的力矩为零. 由转动定律, 得

$$\frac{1}{2}mgL \sin\theta = J\beta = \frac{1}{3}mL^2\beta$$

则有

$$\beta = \frac{3g}{2L} \sin\theta$$

由加速度定义, 得

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2L} \sin\theta$$

由于 $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, 因而, 有

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2L} \sin\theta d\theta$$

对上式积分, 得

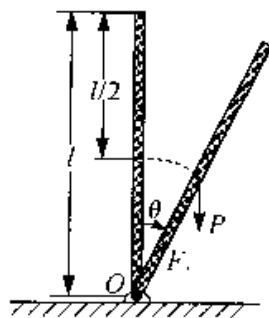


图 4.17

$$\int_1^{\omega} \omega d\omega = \frac{3g}{2L} \int_0^{\theta} \sin\theta d\theta$$

积分后化简,得细杆转到与竖直线成 θ 角时的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)}$$

§ 4.3 定轴转动中的功能关系

一、力矩的功

当质点在外力作用下发生位移时,我们说力对质点作了功,这是力的空间累积作用.同样,当物体在外力矩作用下绕定轴转动而发生角位移时,我们就说力矩对刚体做了功.这就是力矩的空间累积作用.

对于刚体绕定轴转动的情形,平行于转轴的力是不做功的,只有在垂直于转轴平面内的力才能驱使刚体转动,对刚体做功.为了简单起见,设在垂直于转轴平面内有一外力 F , 作用于点 P , 且绕轴转过的角位移为 $d\theta$, 如图 4.18 所示. P 点的位移大小为 $ds = r \cdot d\theta$, 由功的定义,外力 F 在这段位移中所作的元功是

$$\begin{aligned} dA &= F \cos(90^\circ - \varphi) ds \\ &= F \cos(90^\circ - \varphi) r \cdot d\theta \\ &= F \sin\varphi \cdot r \cdot d\theta \end{aligned}$$

式中 θ 是径矢 r 与 F 之间的夹角,正好 $F \sin\varphi \cdot r = M$, 所以上式变为

$$dA_i = M_i d\theta \quad (4-13)$$

设刚体从 θ_1 转到 θ_2 , 则外力 F_i 做的功为

$$A_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_i d\theta \quad (4-14)$$

对多个外力作用下,其总功为

$$\begin{aligned} A &= \sum_i A_i = \sum_i \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_i d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_i M_i \right) d\theta \end{aligned}$$

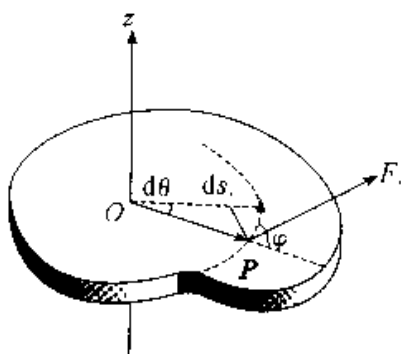


图 4.18 力矩做功

令 $M = \sum M_i$, 为刚体所受的总外力矩, 则有

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta} M d\theta \quad (4-15)$$

上式表明, 力对刚体所做的功可用力矩与刚体角位移乘积的积分来表示, 叫做力矩的功。

二、力矩的功率

力矩做功的快慢叫做力矩的功率, 用 P 表示. 力矩的功率等于单位时间内力矩对刚体所作的功. 设在时间 dt 内, 恒力矩对定轴转动刚体做的功为 dA , 则力矩的功率为

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (4-16)$$

当在 dt 时间内刚体绕定轴转过 $d\theta$ 角, 则有

$$P = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (4-17)$$

上式表明, 力矩的功率也等于力矩与角速度大小的乘积. 当功率一定时, 转速愈低, 力矩愈大; 转速愈高, 力矩愈小.

三、转动动能

刚体可看成是由许许多多质点组成, 刚体的转动动能应等于各质点动能的总和. 设刚体上各质量元的质量与线速度大小分别为 $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_i, \dots$ 与 $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots$, 各质量元到转轴的垂直距离分别为 $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$, 当刚体以角速度 ω 绕定轴转动时, 第 i 个质量元的动能为

$$\frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

刚体的总动能为

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 \\ = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

上式中 $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = J$ 为刚体的转动惯量, 则有

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (4-18)$$

式(4-18)表明,刚体绕定轴转动的转动动能等于刚体的转动惯量与角速度二次方的乘积的一半.式(4-18)与质点动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ 的表达形式是完全相似的.

四、刚体绕定轴转动的动能定理

设绕定轴转动的刚体,在合外力矩 M 的作用下,转过角位移 $d\theta$,根据力矩做功的定义,得合外力矩对刚体所做的元功为

$$dA = M d\theta$$

由转动定律 $M = J\beta = J \frac{d\omega}{dt}$,上式可写成

$$dA = J \frac{d\omega}{dt} d\theta = J \omega d\omega$$

对于绕定轴转动的刚体,设 J 为常量.在合外力矩作用下,由于合外力矩对刚体做功,使得刚体的角速率从 ω_1 变到 ω_2 .合外力矩对刚体所作的功为

$$A = \int dA = J \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega$$

即

$$A = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 \quad (4-19)$$

式(4-19)表明,合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量.这就是刚体绕定轴转动的动能定理.

例 4-7 一根质量为 m 、长为 L 的均匀细棒(图 4.19),可绕通过其一端的光滑轴 O 在竖直平面内转动,现使细棒从水平位置开始自由下摆,求细棒摆到竖直位置时,棒的重力所作的功及在竖直位置细棒角速度大小.

解 由题意可知,本题是讨论绕定轴转动的刚体问题.均质细棒的重力可视为作用在其重心 C 上,当棒转到任意位置 θ 时,重力对转轴 O 的力矩为

$$M = mg \frac{L}{2} \cos\theta$$

显然,力矩 M 是 θ 的函数,在棒转动过程中,力矩是变化的.设棒转过一极小的角位移 $d\theta$ 时,重力矩所做的元功为

$$dA = mg \frac{L}{2} \cos\theta d\theta$$

在棒从水平位置下摆到竖直位置的过程中,重力矩所做的总功为

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg \frac{L}{2} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} mgL$$

应该指出:重力矩做的功就是重力做的功.

由绕定轴转动刚体的动能定理,得

$$A = \frac{1}{2} mgL = \frac{1}{2} J\omega^2 - \frac{1}{2} J\omega_0^2$$

由题意知, $\omega_0 = 0$, 则有

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$$

因为 $J = \frac{1}{3} mL^2$, 代入上式得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

例 4-8 如图 4.20 所示,质量为 m' 、半径为 R 的匀质圆盘,可绕一垂直通过盘心的水平轴转动.圆盘上绕有轻绳,一端悬挂质量为 m 的物体.问物体由静止下落高度 h 时,其速度的大小为多少?绳的质量忽略不计.

解 按 4.20 所示的示力图对圆盘而言,它受到重力 $m'g$ 、支持力 F_N 和拉力 F_T 的作用.因为 $m'g$ 和 F_N 均通过转轴 O ,故作用于圆盘的外力矩仅是拉力 F_T 的力矩.当物体下落高度 h 时,圆盘的转角由 θ_0 改变为 θ ,且 $h = \int_{\theta_0}^{\theta} R d\theta$,由刚体绕定轴转动的动能定理,得

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F_T R d\theta = R \int_{\theta_0}^{\theta} F_T d\theta = \frac{1}{2} J\omega^2 - \frac{1}{2} J\omega_0^2$$

式中 $d\theta$ 为在力矩作用下圆盘转过的角度, ω_0 和 ω 为圆盘在起始和终了时的角速度大小.

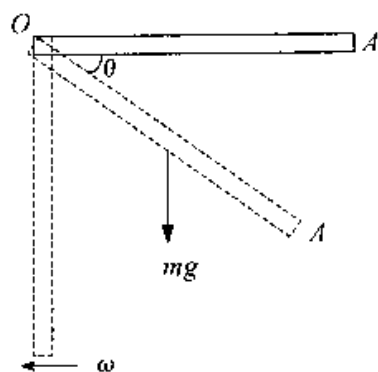


图 4.19

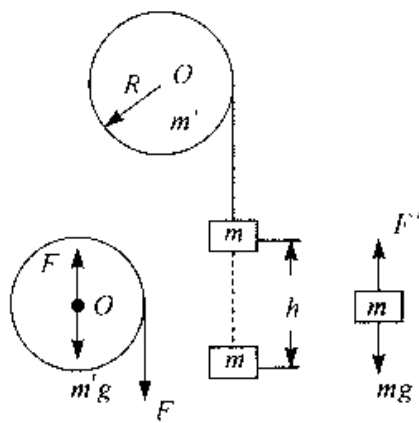


图 4.20

对物体而言,它受到拉力 F_T' 和重力 mg 的作用,且 $F_T' = F_T$. 由质点的动能定理,得

$$mgh - R \int_{\theta_0}^{\theta} F_T d\theta = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

上式中 v_0 和 v 是物体在起始和终了时速度的大小.

由题意可知 $v_0 = 0, \omega_0 = 0$, 且 $v = R\omega$, 上两式联立解得

$$v = \sqrt{\frac{m}{m + \frac{J}{R^2}} 2gh}$$

因为匀质圆盘的转动惯量 $J = \frac{1}{2}m'R^2$, 所以得

$$v = \sqrt{\frac{m}{\frac{m'}{2} + m} 2gh}$$

物体由高 h 处自由下落的末速度大小为 $v' = \sqrt{2gh}$, 因为 $\frac{m'}{2} + m > m$, 所以 $v' > v$. 这是因为物体在下落的过程中, 圆盘也随之转动(机械能是守恒的), 物体的重力势能有一部分转换为圆盘的转动动能.

§ 4.4 角动量守恒定律

一、质点的角动量定理

1. 质点的角动量

如图 4.21(a) 所示, 设有一质量为 m 的质点, 该质点相对坐标原点 O 的位矢为 r , 其速度为 v (动量 $P = mv$), 则质点对坐标原点 O 的角动量定义为

$$L = r \times P = mr \times v \quad (4-20)$$

质点的角动量 L 是一个矢量, 它的方向遵守右手法则: 右手拇指伸直, 当弯曲的四指由 r 经小于 180° 的角转向 v (或 P) 时, 拇指所指的方向就是 L 的方向. 质点角动量 L 的值, 由矢量的矢积法则得

$$L = mnv \sin\theta \quad (4-21)$$

式(4-21)中, θ 为 r 与 v (或 P) 之间的夹角, 显然角动量 L 的方向垂直于 r 与 v (或

P) 构成的平面, 角动量 L 的大小在图 4.21(b) 中是以和为邻边的平行四边形的面积.

应该注意, 质点的角动量是与位矢 r 和动量 P 有关的, 也就是说, 质点的角动量与参考点 O 的选择有关. 因此在讨论质点的角动量时, 必须指明是对那一点的角动量.

如果质点作半径为 r 的圆周运动(图 4.22), 在某一时刻, 质点位于点 A , 速度为 v , 显然 r 与 v (或 P) 总是垂直的. 于是质点对圆心 O (参考点) 的角动量 L 的大小为

$$L = rmv \quad (4-22)$$

由于 $v = r\omega$, 角动量 L 的大小亦可写成

$$L = mr^2\omega \quad (4-23)$$

角动量 L 的方向平行于 Z 轴, 且与 ω 的方向相同.

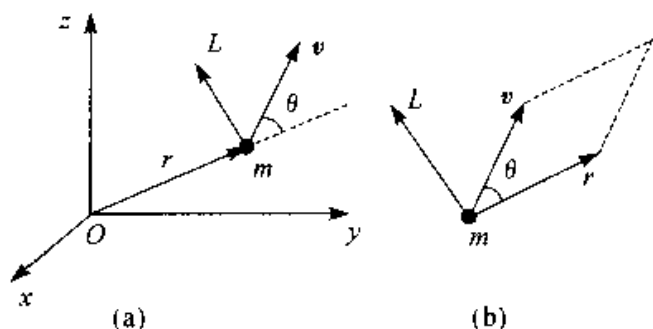


图 4.21 质点的角动量

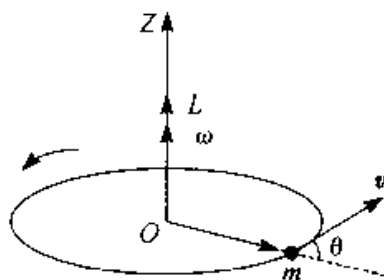


图 4.22 质点作圆周运动的角动量

2. 质点的角动量定理

质量为 m 的质点, 在合力 F 的作用下绕定轴转动, 设某一时刻 t , 质点相对于参考点 O 的位矢为 r , 速度为 v , 由质点的角动量 L 的定义, 有

$$L = r \times mv$$

上式两边同时对时间求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \times mv) \\ &= \frac{dr}{dt} \times mv + r \times \frac{d}{dt}(mv) \end{aligned}$$

因为 $\frac{dr}{dt} \times mv = v \times mv = 0$, $F = \frac{d}{dt}(mv)$

所以

$$r \times F = \frac{dL}{dt}$$

上式中 $r \times F$ 是合力 F 对参考点 O 的合力矩 M , 于是上式为

$$M = \frac{dL}{dt} \quad (4-24)$$

式(4-24)表明, 作用于质点的合外力对参考点 O 的力矩, 等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率. 这与牛顿第二定律 $F = \frac{dP}{dt}$ 在形式上是相似的.

由式(4-24), 有

$$Mdt = dL$$

式中 Mdt 是力矩 M 与作用时间 dt 的乘积, 叫作冲量矩, 上式取积分有

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = L_2 - L_1 \quad (4-25)$$

式中 L_1 和 L_2 分别为质点在时刻 t_1 和 t_2 对参考点 O 的角动量, $\int_{t_1}^{t_2} Mdt$ 为质点在时间间隔 $t_2 - t_1$ 内对参考点 O 所受的冲量矩.

因此, 式(4-25)表明: 对同一参考点 O , 质点所受到的冲量矩等于质点角动量的增量. 这就是质点的角动量定理.

3. 质点的角动量守恒定律

从质点的角动量定理表达式(4-25)可以看出, 当作用在质点上的合力对参考点 O 的合力矩为零时, 质点对该参考点 O 的角动量为恒矢量, 即

$$\text{当 } M = 0 \text{ 时, } L = r \times m v = \text{恒矢量} \quad (4-26)$$

这就是质点的角动量守恒定律.

由式(4-26)看出, 质点的角动量守恒的条件是合力矩 $M = 0$. 要使合力矩 $M = 0$, 一是合力 $F = 0$; 二是合力 F 虽不为零, 但合力 F 通过参考点 O . 质点作匀速率圆周运动时, 作用于质点的合力是指向圆心的所谓有心力, 故其力矩为零, 质点对圆心(力心)的角动量守恒. 太阳作用于行星的引力是指向太阳的有心力, 因此如以太阳为参考点 O , 则行星的角动量是守恒的.

在国际单位制中, 角动量的单位是千克二次方米每秒, 符号为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. 角动量的量纲为 $\text{ML}^2 \text{T}^{-1}$.

例 4-9 如图 4.23(a) 所示, 一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内. 有一质量为 m 的小球穿在圆环上, 并可在圆环上滑动. 小球开始时静止于圆环上的点 A (这点在通过环心 O 的水平面上), 然后从点 A 开始下滑. 设小球与圆环间的摩擦略去不计, 求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度.

解 如图 4.23(b) 所示, 小球受到支持力 F_N 和重力 mg 的作用. 支持力 F_N 对点 O 的力矩为零, 故小球所受的力矩只有重力矩, 其大小为

$$M = mgR \cos\theta$$

重力矩的方向垂直纸面向里, 因此, 由式(4-24), 有

$$mgR \cos\theta = \frac{dL}{dt} \quad (1)$$

因为 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, $L = mRv = mR^2\omega$, 所以有

$$dt = \frac{mR^2}{L} d\theta \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 得

$$LdL = m^2 g R^3 \cos\theta d\theta$$

由题意设: $t = 0, \theta_0 = 0$, 故上式积分为

$$\int_0^L L.dL = m^2 g R^3 \int_0^\theta \cos\theta d\theta$$

则有

$$L = mR^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g \sin\theta} \quad (3)$$

将 $L = mR^2\omega$ 代入(3)式得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R} \sin\theta}$$

例 4-10 设人造地球卫星在地球引力作用下沿平面椭圆轨道运动, 地球中心可以看作固定点且为椭圆轨道的一个焦点, 卫星的近地点离地面的距离为 439 km, 远地点离地面的距离为 2 384 km. 已知卫星在近地点的速度为 $8.23 \text{ km}(\text{s}^{-1})$, 求卫星在远地点的速度大小. 设地球的平均半径为 $R = 6 370 \text{ km}$.

解 以卫星为讨论对象, 作用在卫星上的力是地球的引力, 为有心力. 因而在卫星运动过程中, 卫星对地球中心的角动量保持不变. 设卫星在近地点到地球中心的距离为 r_A , 速度为 v_A , 卫星在远地点到地球中心的距离为 r_B , 速度为 v_B , 卫星的质量为 m . 则有

$$mv_B r_B = mv_A r_A$$

因为

$$r_A = 6 370 + 439 = 6 809 \text{ km}$$

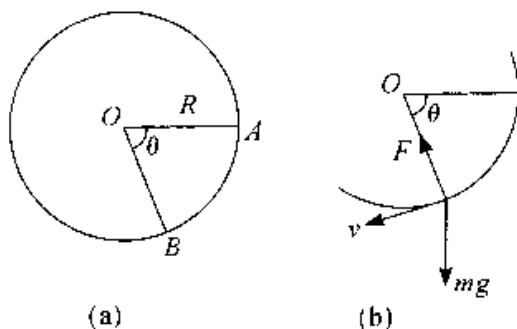


图 4.23

$$r_B = 6\,370 + 2\,384 = 8\,754 \text{ km}$$

故有

$$v_B = \frac{r_A}{r_B} v_A = \frac{6809 \times 8.12}{8754} = 6.32 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

二、刚体绕定轴转动的角动量定理

1. 刚体绕定轴转动的角动量

设一刚体以角速度 ω 绕定轴 Oz 转动,如图 4.24 所示.由于刚体绕定轴转动,刚体上每一个质点都以相同的角速度 ω 绕轴 Oz 作圆周运动.其中质点 Δm ,对轴 Oz 的角动量 $L_i = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$,则刚体上所有质点对轴 Oz 的角动量,即刚体对定轴的角动量为

$$L = \sum_i L_i = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega$$

式中 $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ 为刚体绕定轴 Oz 的转动惯量 J ,于是刚体对定轴 Oz 的角动量为

$$L = J\omega \quad (4-27)$$

上式与质点的动量 $P = mv$ 具有相同的形式.

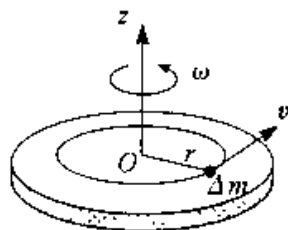


图 4.24 刚体的角动量

2. 刚体绕定轴转动的角动量定理

当刚体绕定轴转动时,由式(4-24)可知,作用在刚体上任一质点 Δm_i 上的合力矩 M_i 应等于质点的角动量随时间的变化率,即

$$M_i = \frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\Delta m_i r_i^2 \omega)$$

式中合力矩 M_i 包括外力作用在质点 Δm_i 的力矩 M_i^e 称之为外力矩,以及刚体内各质点作用在质点 Δm_i 的力矩 M_i^i 称之为内力矩.

对绕定轴转动的刚体, $\sum_i M_i^i = 0$,即刚体内各质点的内力矩之和为零.则作用于绕定轴转动刚体的合外力矩为

$$M = \sum_i M_i^e = \frac{d}{dt} \sum_i L_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega \right)$$

即

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) \quad (4-28)$$

式(4-28)表明,刚体绕定轴转动时,作用于刚体的合外力矩等于刚体绕此定轴的角动量随时间的变化率.对照 $M = J\beta$,可以看出式(4-28)是转动定律的另一表达方式,但其意义更加普遍.这与质点动力学中,表达式 $F = \frac{dP}{dt}$ 较之 $F = ma$ 更普遍是类似的.

设有一转动惯量为 J 的刚体绕定轴转动,在合外力矩的作用下,在 $t_2 - t_1$ 时间内,其角速度由 ω_1 变为 ω_2 .由式(4-28)积分,得

$$\int_1^2 M dt = \int_{L_1}^{L_2} dL = L_2 - L_1 = J\omega_2 - J\omega_1 \quad (4-29a)$$

式(4-29)中 $\int_1^2 M dt$ 是合外力矩与作用时间的乘积,叫做力矩对给定轴的冲量矩,又叫角冲量.冲量矩表示力矩在一段时间间隔内的累积效应.

物体在转动过程中,如果转轴位置发生变化或物体的质量分布发生变化,其转动惯量也必然随时间改变.设 t_1 时刻转动物体的转动惯量为 J_1 、角速度为 ω_1 , t_2 时刻转动物体的转动惯量为 J_2 、角速度为 ω_2 ,则(4.29a)式应改为

$$\int_1^2 M dt = \int_{L_1}^{L_2} dL = J_2\omega_2 - J_1\omega_1 \quad (4-29b)$$

式(4-29)表明,当转轴给定时,作用在刚体上的外力矩的冲量矩等于刚体对该轴的角动量的增量.这一结论叫做绕定轴转动刚体的角动量定理.

三、刚体绕定轴转动的角动量守恒定律

当作用在绕定轴转动刚体上的合外力矩为零时,根据角动量定理式(4-29),刚体在转动过程中角动量守恒不变,即

$$M = 0 \text{ 时, } J\omega = \text{恒量} \quad (4-30)$$

式(4-30)表明,如果刚体所受的合外力为零,或者不受外力矩的作用,刚体的角动量保持不变.这个结论叫做角动量守恒定律.如果刚体在转动过程中转动惯量保持不变,则物体以恒定的角速度转动;如果刚体在转动过程中转动惯量发生改变,则刚体的角速度也随之改变,但二者之积保持不变.

角动量守恒定律可以用图 4.25 中的实验生动的演示出来.有一人坐在能够绕竖直轴转动的圆盘形凳子上(摩擦忽略不计)演示时,一人坐在凳子上,两手各握一个很重的哑铃.当人平举双臂时,在别人帮助下,使人和凳子一起以一定角速度旋转,然后此人在转动中收回双臂,由于在水平面内没有外力矩作用,人和凳子的角动

量应保持不变,所以当人收回双臂时,转动惯量变小,导致角速度增大,因而比平举双臂时要转得快一些.

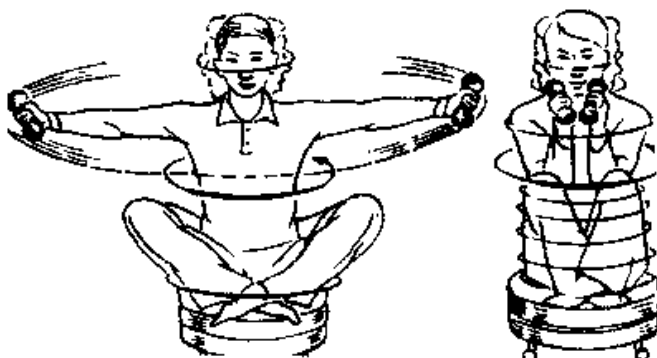


图 4.25 角动量守恒定律的演示

在日常生活中,有许多利用角动量守恒定律的例子.例如,花样滑冰运动员、芭蕾舞演员等,在旋转的时候,往往先把双臂张开旋转,然后迅速将双臂靠拢身体,使自己对身体中央竖直轴的转动惯量迅速减小,因而旋转角速度加快.

又如跳水运动员,当其向前伸开双臂,并以某一角速度离开跳板后,在空中迅速将臂和腿尽量卷缩起来,以减小它对横贯腰部的转轴的转动惯量,因而角速度增大,以便完成空中的翻转动作,当快接近水面时,伸直臂和腿可增大转动惯量,减小角速度,以便竖直地进入水中时,减小水花.

角动量守恒定律,与前面介绍的动量守恒定律和能量守恒一样,是自然界中的普遍规律,尽管都是在不同的理想化条件(如质点、刚体……)下,用经典的牛顿力学原理“推证”出来的,但它们的使用范围,却远远超出原有条件的限制,以后会看到,即使在原子内部,也都严格的遵从这三条定律.

例 4-11 一长为 L , 质量为 m 的均质细杆,一端悬挂,可以通过 O 点的水平轴转动,如图 4.26 所示.当细杆从水平位置自由释放后,它在铅直位置与质量也为 m 的物体作完全非弹性碰撞,碰撞后物体沿摩擦系数为 μ 的水平面滑动.试求物体沿水平面滑动的距离.

解 此问题可分三个阶段分析.第一阶段是细杆自由下摆的过程,这时除细杆自身重力外,其余力都不做功,设 ω 为此阶段末细杆的角速度,根据动能定理,有

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2 - 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega^2 \quad (1)$$

第二阶段是完全非弹性碰撞过程,系统受的外力对悬挂轴的力矩为零,故系统对 O 轴的角动量守恒,设碰撞结束时细杆的角速度为 ω' ,则有

$$\left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega = mL^2 \omega' + \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega' \quad (2)$$

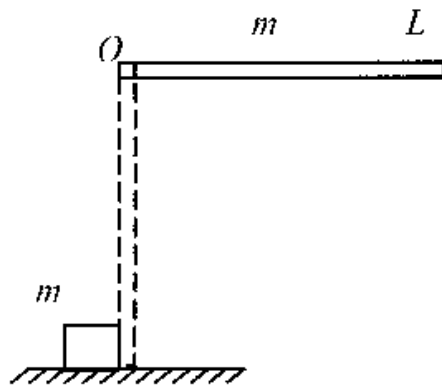


图 4.26

第三阶段是物体碰撞后的滑行过程. 设物体在摩擦力作用下滑过的距离为 s , 根据质点的动能定理, 有

$$-mg\mu s = 0 - \frac{1}{2}m(L\omega')^2$$

联立式(1)、(2)和(3)解得

$$S = \frac{3L}{32\mu}$$

例 4-12 如图 4.27 所示, 一杂技演员 M 由距水平跷板高度为 h 处自由下落到跷板的一端 A , 并把跷板另一端的演员 N 弹了起来. 设跷板是长为 L 、质量为 m' 的均质板, 支撑点在板的中部点 C , 跷板可绕点 C 在竖直平面内转动, 演员 M 、 N 的质量都是 m , 假定演员 M 落在跷板上 A 处, 与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞. 问演员 N 可弹起多高?

解 为使讨论简化, 把演员视为质点. 演员 M 落在板 A 处的速率为 $v_M = \sqrt{2gh}$, 现把演员 M 、 N 和跷板看作为一个系统, 由于 M 、 N 两演员的质量相等, 所以当演员 M 碰撞板 A 处时, 作用在系统上的合外力矩为零, 故系统的角动量守恒, 设碰撞后演员和板 C 的角速度为 ω , 则有

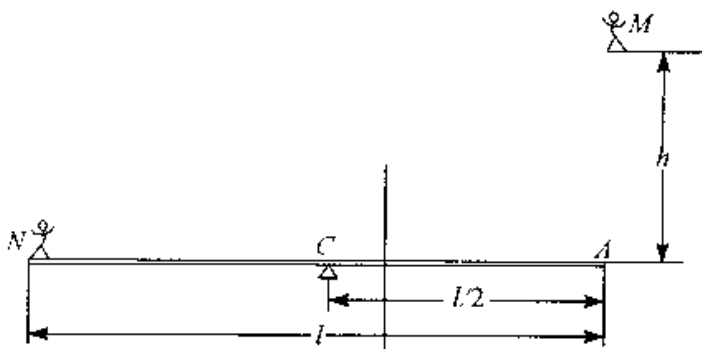


图 4.27

$$mv_M = \frac{L}{2} = \left(\frac{1}{12}m'L^2 + \frac{1}{2}mL^2\right)\omega$$

由上式解得

$$\omega = \frac{mv_M \frac{L}{2}}{\frac{1}{12}m'L^2 + \frac{1}{2}mL^2}$$

这样演员 N 将以线速度 $u = \frac{L}{2}\omega$ 跳起, 达到的高度 h' 为

$$h' = \frac{u^2}{2g} = \frac{L^2\omega^2}{8g} = \left(\frac{3m}{m' + 6m}\right)^2 h$$

例 4-13 如图 4.28 所示, 宇宙飞船对其中心轴的转动惯量为 $J = 2 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m}^2$, 它以 $\omega = 0.2 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 的角速度绕中心轴旋转. 宇航员想用两个切向的控制喷

管使飞船停止旋转. 每个喷管的位置与轴线距离都是 $r = 1.5 \text{ m}$. 两喷管的喷汽量恒定, 共是 $\alpha = 2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. 废气的喷射率(相对于飞船周边) $u = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 并且恒定. 问喷管应喷射多长时间才能使飞船停止旋转.

解 把飞船和排出的废气看作一个系统, 废气质量为 m . 可以认为废气质量远小于飞船的质量, 所以原来系统对于飞船中心轴的角动量近似地等于飞船自身的角动量, 即

$$L_0 = J\omega \quad (1)$$

在喷气过程中, 以 dm 表示时间 dt 内喷出的气体. 这些气体对飞船中心轴线的角动量为 $dm \cdot r(u + v)$. 方向与飞船的角动量相同.

因为 $u \gg v (v = r\omega)$, 所以此角动量近似地等于 $dm \cdot ru$. 在整个喷气过程中喷出废气的总角动量 L_g 应为

$$L_g = \int_0^m dm \cdot ru = mru \quad (2)$$

当宇宙飞船停止旋转时, 其角动量为零. 系统这时的总角动量 L_1 就是全部排出的废气的总角动量, 即

$$L_1 = L_g = mru$$

在整个喷气过程中, 系统所受到的对于飞船中心轴的外力矩为零, 所以系统对于飞船中心轴的角动量守恒, 即

$$L_0 = L_1 \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3)得

$$J\omega = mru$$

即

$$m = \frac{J\omega}{ru}$$

于是所需的时间为

$$\begin{aligned} t &= \frac{m}{\alpha} = \frac{J\omega}{\alpha ru} \\ &= \frac{2 \times 10^3 \times 0.2}{2 \times 1.5 \times 50} = 2.67 \text{ s} \end{aligned}$$

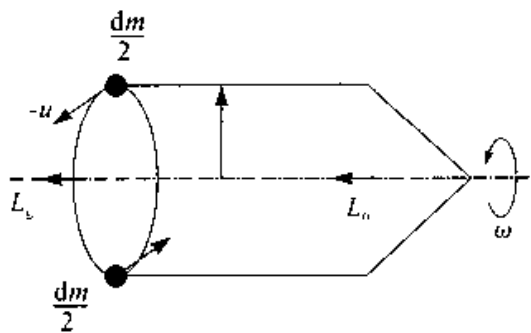


图 4.28

§ 4.5 进 动

前面讨论了刚体定轴转动的规律,然而,当刚体的转动轴不固定时,其运动规律又如何呢?本节我们以大家熟悉的玩具陀螺的转动为例,引入刚体进动的概念.

大家知道,玩具陀螺不转动时,在重力矩作用下将发生倾倒.但当陀螺高速旋转时,尽管它仍在重力矩作用下,却居然不倒下来.这时,我们看到,陀螺在绕自身对称轴线转动的同时,其对称轴还将绕竖直轴 oz 回转,如图 4.29(a) 所示.我们把自转轴绕竖直轴的这种转动称为进动 (precession) 或旋进,而把陀螺在外力矩作用下产生旋进的效应,称为回转效应 (gyroscopic effect).

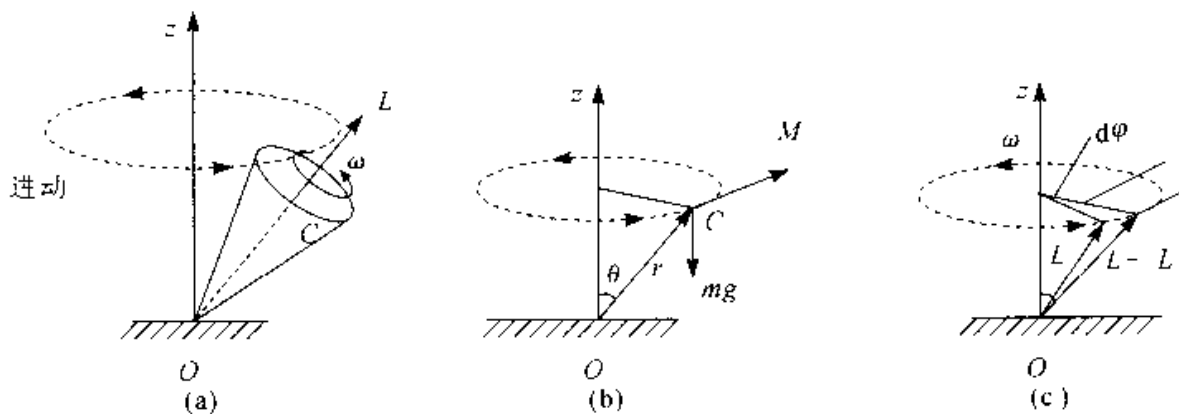


图 4.29 陀螺的进动

为什么陀螺在重力矩作用下不倾倒呢?其实,这不过是机械运动矢量性的一种表现.我们知道,在平动情况中,如果质点原有的运动方向与外力方向不一致,那么,质点最后运动的方向既不是原有的运动方向,也不是外力的方向,实际的运动方向是由上述两个方向共同决定的.在转动中,也有类似情况.本来旋转着的物体,在与它的转动方向不同的外力矩作用下,也不是沿外力矩的方向转动,而会出现进动现象.根据经验,快速自转陀螺的自转轴总是围绕竖直轴 oz 转动而扫出一个圆锥面;与此同时,陀螺还绕其自转轴转动,自转角速度为 ω .一般而言,对称陀螺的总角动量 L 与 ω 同方向.

对于固定点 o 来说,陀螺只受到重力矩

$$M = r_c \times mg$$

的作用,其中 r_c 是陀螺质心的位置矢量, M 的方向如图 4.29(b) 所示.根据角动量定

理,在极短时间 dt 内陀螺的角动量将增加

$$dL = Mdt$$

其方向与外力矩的方向相同. 因外力矩的方向垂直于 L , 所以 dL 的方向也与 L 垂直, 结果使 L 的大小不变而方向发生变化, 如图 4.29(c) 所示. 因此, 陀螺的自转轴将从 L 的位置转到 $L + dL$ 的位置上. 从陀螺的顶部向下看, 其自转轴的回转方向是逆时针的. 这样, 陀螺就不会倒下, 而沿一锥面转动, 亦即绕竖直轴 oz 作进动.

现在我们计算进动的角速度. 按定义, 进动角速度应为

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt}$$

在 dt 时间内, 角动量 $L(L = J\omega)$ 的增量 dL 是很小的, 从图 4.29(c) 可知,

$$dL = L \sin\theta d\varphi = J\omega \sin\theta d\varphi$$

式中 ω 为陀螺自转的角速度, $d\varphi$ 为自转轴在 dt 时间内绕 oz 轴转动的角位移, θ 为自转轴与 oz 轴间的夹角. 由角动量定理

$$dL = Mdt$$

由此二式得

$$d\varphi = \frac{Mdt}{J\omega \sin\theta}$$

所以

$$\omega_P = \frac{M}{J\omega \sin\theta} \quad (4-31)$$

此式表明, 进动角速度 ω_P 与外力矩成正比, 与陀螺自转的角动量成反比. 因此, 当陀螺自转角速度很大时, 进动角速度较小; 而在陀螺自转角速度很小时, 进动角速度却增大.

进动原理广泛应用于航空、航海、导弹、火箭等系统的定向、导航、自动驾驶等. 炮弹的飞行也利用了进动原理, 如图 4.30 所示, 炮弹在

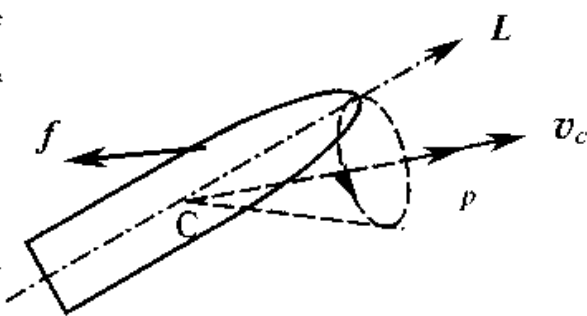


图 4.30 炮弹飞行的进动

飞行时, 要受到空气阻力的作用. 阻力 f 的方向总与炮弹质心的速度 v_c 方向相反, 但其合力不一定通过质心. 阻力对质心的力矩就会使炮弹在空中翻转. 这样, 当炮弹射中目标时, 就有可能使弹尾先触击目标而不引爆, 从而丧失威力. 为了避免这种事故, 就在炮筒内壁上刻出螺旋线. 这种螺旋线叫来复线. 当炮弹由于发射药的爆炸被

强力推出炮筒时,还同时绕自己的对称轴高速旋转.由于这种旋转,炮弹在飞行中受到的空气阻力的力矩将不能使它翻转,而只是使它绕着质心前进的方向进动.这样,它的轴线将会始终只与前进的方向有不大的偏离,而弹头就总是大致指向前方了.

进动的概念在微观世界中也常用到.例如,原子中的电子同时参与绕核运动和电子本身的自旋,都具有角动量,在外磁场中,电子将以外磁场方向为轴线作进动.这是从物质的电结构来说明物质磁性的理论依据.

例 4-14 如图 4.31 所示,地球的自转轴与它绕太阳的轨道平面的垂线间的夹角为 $\theta = 23.5^\circ$,由于太阳和月球对地球的引力产生力矩,地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动,进动周期 T_1 约为 27 725 a(年).已知地球的质量 m 为 5.98×10^{24} kg,地球的半径 R 为 6.378×10^6 m.试求:(1)地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动的角速度;(2)地球自转角动量变化率的大小 $\left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|$,以及太阳和月球的合力矩的大小.

解 (1)地球的自转轴绕轨道平面的垂线进动的角速度为

$$\begin{aligned}\omega_P &= \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2 \times 3.14}{27725 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 7.27 \times 10^{-12} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

(2)地球自转周期(1恒星日)为 $T_2 = 8.616 \times 10^4$ s,,由(4-31)式,得地球自转角动量的变化率及太阳和月球的合力矩的大小为

$$\begin{aligned}M &= \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = J\omega \sin\theta \omega_P \\ &= \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} \cdot \sin\theta \omega_P \\ &= 1.67 \times 10^{22} \text{N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

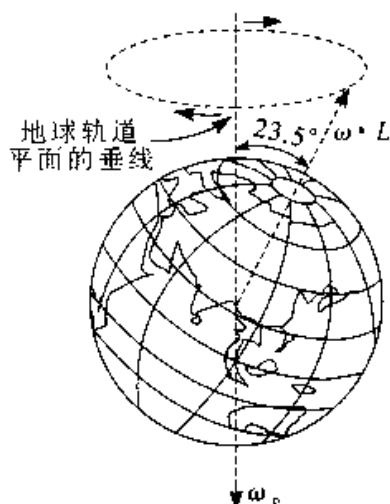


图 4.31 地球的进动

思考题

- 4-1 火车在拐弯时所作的运动是不是平动?
- 4-2 地球自西向东自转,它的自转角速度矢量指向什么方向?试作图说明.
- 4-3 试根据 ω 与 α 的正负,讨论定轴转动刚体在什么情况下是加速转动?在什

么情况下是减速转动?

4-4 为什么说对刚体平动的讨论可归结为对质点运动的研究?

4-5 如果刚体所受的合外力为零,其合外力矩是否也一定为零?如果刚体所受合外力矩为零,其合外力是否一定为零?

4-6 在某一瞬时,如果刚体受到的合外力矩不为零,其角加速度可以为零吗?其角速度可以为零吗?

4-7 两个同样大小的轮子,质量也相同.一个轮子的质量主要集中在轮缘,另一个轮子的质量主要集中在轮轴附近.问:

(1) 如果它们的角速度相同,那一个飞轮的动能较大?

(2) 如果它们的角加速度相等,作用在那一个飞轮上的力矩较大?

(3) 如果它们的角动量相等,那一个飞轮转得快?

4-8 将一个生鸡蛋和一个熟鸡蛋放在桌子上使其转动,如何判定哪一个是生的,那一个是熟的?为什么?

4-9 一半径为 r 的均质小球,沿两个高度相同,倾角不同的斜面无滑动的滚下,在这两种情况下,小球到达斜面下端的速率是否相同?

4-10 一个人将两臂伸平,两手各拿一只重量相等的哑铃坐在角速度为 ω_0 的转台上(为人与转台共同角速度),突然,他将哑铃丢下,但两臂不动,问角动量是否守恒?它们的角速度是否改变?

4-11 你骑自行车前进时,车轮的角动量指向什么方向?当你的身体向左侧倾斜时,对车轮加了什么方向的力矩?试根据进动原理说明这时你的自行车为什么要向左转弯.

习 题

4-1 一飞轮直径为 0.40 m,边缘绕有绳子,现用恒力拉绳子一端,使其由静止均匀地加速,经 1.0 s 转速达 20 r/s. 假定飞轮可看作实心圆柱体,求:(1) 及在这段时间内转过的圈数;(2) 拉动后第 10 s 末飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度?

4-2 某种电机启动后转速随时间变化的关系为 $\omega = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, 式中 $\omega_0 =$

9. $0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\tau = 2.0 \text{ s}$. 求: (1) $t = 6.0 \text{ s}$ 时的转速; (2) 角加速度随时间变化的规律; (3) 启动后 6.0 s 内转过的圈数.

4-3 一直径为 18 cm 的转轮, 在 5 min 内, 转轮的转速 2000 r/min 均匀的增加到 4000 r/min , 试求转轮角加速度及轮缘任一点的切向加速度和法向加速度的大小.

4-4 一飞轮从静止开始作匀加速转动, 在最初 1 min 转了 900 转, 求飞轮的角加速度和第 25 s 末的角速度.

4-5 飞轮的质量为 60 kg , 直径为 0.50 m , 转速为 1000 r/min . 现要求在 5.0 s 内使其制动, 求制动力 F , 假定闸瓦与飞轮之间的摩擦因数 $\mu = 0.40$, 飞轮的质量全部分布在轮的外周上, 尺寸如图 4.32 所示.

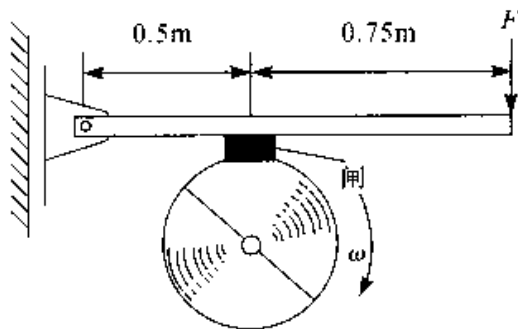


图 4.32

4-6 一燃气轮机在试车时, 燃气作用在涡轮上的力矩为 $2.03 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$, 涡轮的转动惯量为 $25.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 当轮的轴速由 $2.80 \times 10^3 \text{ r/min}$ 增大到 $1.12 \times 10^4 \text{ r/min}$ 时, 所经历的时间 t 为多少?

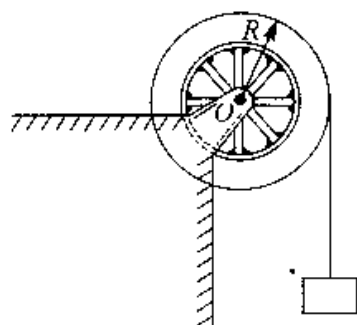


图 4.33

4-7 用落体观察法测定飞轮的转动惯量, 如图 4.33 所示使质量为 m 的重物由静止开始下落, 带动飞轮转动. 记录重物下落的距离和时间, 便可计算出飞轮的转动惯量. 试写出它的计算式(轴承摩擦忽略不计).

4-8 一半径为 R , 质量为 m 的均质圆盘, 求通过圆盘边缘且与盘面垂直的轴的转动惯量.

4-9 试证明质量为 m , 半径为 R 的匀质球体, 以直径为轴的转动惯量为 $\frac{2}{5}mR^2$. 如以和球体相切的线为轴, 其转动惯量又为多少?

4-10 质量面密度为 σ 的匀质矩形板, 试证通过与板面垂直的几何中心轴线的转动惯量为 $\frac{\sigma}{12}ab(a^2 + b^2)$, 其中 a 为矩形板的长, b 为它的宽.

4-11 以质量为 m , 半径为 R , 长为 L 的匀质圆柱体. 试求该圆柱体对通过其中心轴的转动惯量.

4-12 如图 4.34 所示的系统, 滑轮 C 可视为半径为 $R = 0.01 \text{ m}$ 、质量为 $m_C = 15 \text{ kg}$ 的匀质圆盘, 滑轮与绳子间无滑动, 水平面光滑, 若滑块 A 的质量为 $m_A = 50 \text{ kg}$, 重物 B 的质量为 $m_B = 200 \text{ kg}$. 求重物 B 的加速度及绳中的张力.

4-13 如图 4.35 所示, 质量为 $m_1 = 16 \text{ kg}$ 的实心圆柱体 A, 其半径为 $r = 15 \text{ cm}$ 可以绕其固定水平轴转动, 阻力忽略不计, 一条轻绳绕在圆柱体上, 其另一端系一个质量为 $m_2 = 8.0 \text{ kg}$ 的物体 B, 求: (1) 物体 B 由静止开始下降 1.0 s 后的距离; (2) 绳的张力.

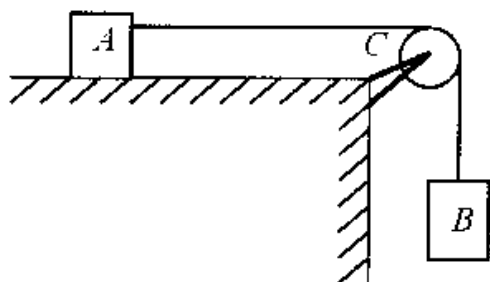


图 4.34

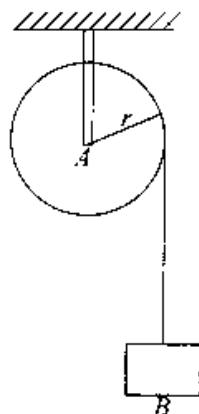


图 4.35

4-14 如图 4.36 所示装置, 定滑轮是半径为 R , 质量为 $2m$ 匀质圆盘, 滑轮两边分别悬挂质量均为 m 的物体 A、B. 置于倾角为 $\theta = 30^\circ$ 的光滑斜面上, 若 B 向下作加速运动时, 求: (1) 其下落的加速度大小; (2) 滑轮两边绳子的张力. (设绳的质量及伸长均不及, 绳与滑轮间无滑动, 滑轮与轴承近光滑).

4-15 如图 4.37 所示, 半径分别为 r_1 、 r_2 的两个薄伞形轮, 它们各自对通过盘心且垂直面转轴的转动惯量为 J_1 和 J_2 . 开始时轮 I 以角速度 ω_0 转动, 问与轮 II 成正交啮合后, 两轮的角速度分别为多大?

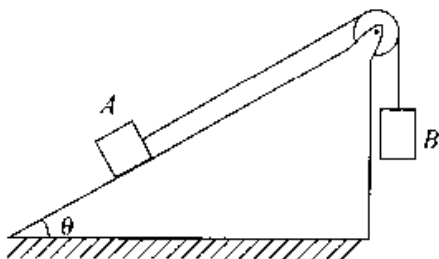


图 4.36

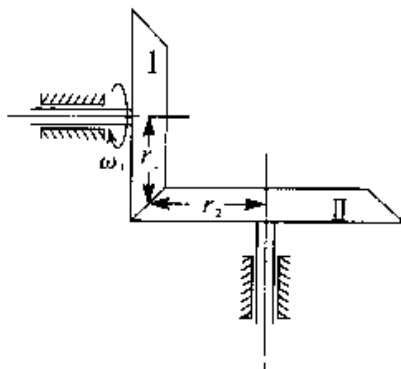


图 4.37

4-16 一质量为 20.0 kg 的小孩, 站在一半径为 3.00 m , 转动惯量为 $450 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的静止水平转台边缘上, 转台与轴间的摩擦不计. 如果此小孩对转台以 $1.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率沿转台边缘行走, 问转台的角速度有多大?

4-17 如图 4.38 所示, 有一根质量很小的长度为 L 的匀质细杆, 可绕通过其中心点 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动. 当细杆静止于水平位置时, 有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距转轴为 $l/4$ 处, 并背离点 O 向细杆的断点爬行. 设小虫的质量与细杆的质量均为 m . 问欲使细杆以恒定的角速度转动, 小虫向细杆端点 A 爬行的速率为多少?

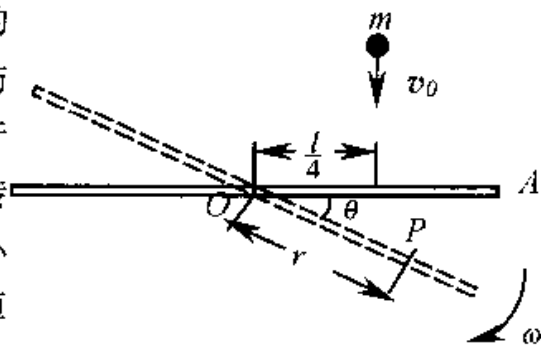


图 4.38

4-18 一质量为 1.12 kg , 长为 1.0 m 的均匀细棒, 支点在棒的上端点, 开始时棒自由悬挂, 以 100 N 的力打击它的下端点. 打击时间为 0.02 s , (1) 若打击前棒是静止的, 求打击时其角动量的变化; (2) 求棒的最大偏转角.

4-19 (1) 设氢原子中电子在圆形轨道上以速率 v 绕质子运动. 作用在电子上的向心力大小为 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (库仑力), 其中 e 为电子的电量, r 为轨道半径, ϵ_0 为恒量 (真空中电导率). 试证明轨道半径为

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

(2) 假设电子绕核的角动量为 $h/2\pi$ 的整数倍, 其中 h 为普朗克恒量. 试证明电子的可能轨道半径由下式确定:

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}$$

(3) 是由以上两式消去 v , 从而证明符合这两个要求的轨道半径必须满足以下关系式:

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

4-20 如图 4.39 所示, A 与 B 两飞轮的轴杆由摩擦啮合器使之连接, A 轮的转动惯量 $J_1 = 10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 开始时 B 轮静止, A 轮以 $n_1 = 600 \text{ r/min}$ 的转速转动, 然后使 A 与 B 连接, 因而 B 轮得到加速而 A 轮减速, 直到两轮的转速都等于 $n_2 = 200 \text{ r/min}$ 为止. 求: (1) B 轮的转动惯量; (2) 啮合过程中损失的机械能.

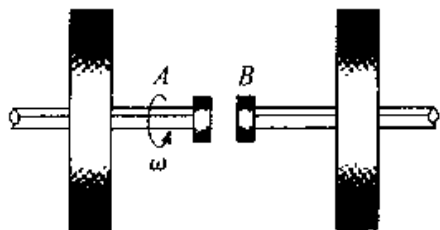


图 4.39

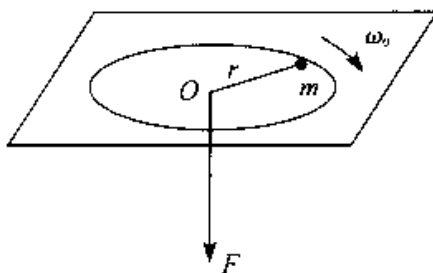


图 4.40

4-21 如图 4.40 所示,一质量为 m 的小球由一绳索系着,以角速度 ω_0 在无摩擦的水平面上,以 r 为半径作圆周运动.如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力,小球则以半径为 $r/2$ 作圆周运动.试求:(1) 小球新的角速度;(2) 拉力所做的功.

4-22 如图 4.41 所示,回转仪转盘的质量为 $m = 0.10 \text{ kg}$,半径为 $R = 0.05 \text{ m}$,离 Z 轴的距离为 $d = 0.10 \text{ m}$,转盘绕 y 轴以 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ 的角速度转动.求:(1) 该轮自转的角动量;(2) 作用与轴上的外力矩;(3) 系统的进动角速度,并判断进动方向.

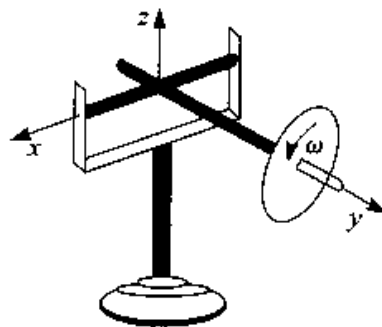


图 4.41

第 5 章 机械振动

物体在其稳定平衡位置附近而作的往复运动称为机械振动,简称振动.它是物体的一种运动形式.在自然界和工程技术中到处都存在着振动.如正常人的心脏在不停息的振动,海浪的起伏以及地震都是振动,一切发声体都在振动,火车过桥引起的振动,运行着的机械零件、机座的振动,晶体中的原子也都在不停息的振动着.

物体在弹性介质中振动时,可以影响周围的介质,使介质质元陆续地振动起来,这种振动的传播过程,就形成机械波,因此,振动理论也是研究机械波而必备的基础知识.

简谐振动是最简单的振动,因为一切复杂的振动都可以认为是由许多简谐振动合成的.本章先介绍简谐振动的特征及表达式,简谐振动的能量,然后说明振动的合成规律,最后介绍阻尼振动和受迫振动.

§ 5.1 简谐振动

一、简谐振动的特征及表达式

物体振动时,如果离开平衡位置的位移按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化,这种振动称为简谐振动.简谐振动是最简单、最基本的振动,弹簧振子的振动就是一种简谐振动.

一质量可忽略的弹簧,一端固定,另一端系一质量为 m 的物体,放在光滑水平面上,这样的系统称为弹簧振子,如图 5.1.

在此系统中,物体所受的阻力略去不计.将物体从平衡位置 O 向右移动到位置 x ,然后无初速地释放,物体在弹力的作用下向左运动,在从 x 向平衡位置 O 运动的过程中,物体在水平方向仅受向左指向平衡位置 O 的弹力,

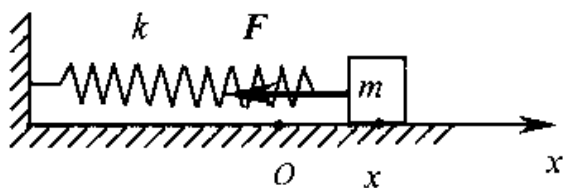


图 5.1

力的方向与运动方向相同,物体作加速运动.当物体到达平衡位置 O 时,它受到的合外力为零,加速度也为零,但速度并不为零.由于惯性,物体将继续向左运动,此后弹簧被压缩,物体受向右指向平衡位置 O 的弹力,力与运动方向相反,因此物体作减速运动.物体到达左边最远位置时,速度减小到零.此后物体在弹力作用下向右运动返回平衡位置,情形与向左返回平衡位置过程相似.这样,在弹性力和物体的惯性支配下,物体就在平衡位置附近作往复运动,从而形成振动.

(1) 弹簧振子的受力特征

设弹簧的劲度系数为 k ,物体的质量为 m ,忽略各种阻力,取平衡位置为坐标原点, x 坐标指向右为正,物体位置坐标为 x 时,物体所受的弹性力 F_x 可表示为

$$F_x = -kx \quad (5-1)$$

此力的大小与物体相对于平衡位置的位移 x 成正比,而方向相反,始终指向平衡位置.故此力常称为回复力.

(2) 弹簧振子的运动特征

由牛顿第二定律和(5-1)式可知

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

对于一个给定的弹簧振子, k 与 m 都是常量,而且都是正值,它们的比值 $\frac{k}{m}$ 可用另一个常量 ω 的二次方表示,即

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

从而有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{其中 } \omega^2 = \frac{k}{m}) \quad (5-2)$$

此微分方程的正解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5-3)$$

这就是物体 m 的运动方程,也就是简谐振动的表达式.

由(5-3)式,可求得任意时刻物体 m 的速度和加速度的表达式

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (5-4)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5-5)$$

比较(5-3)式和(5-5)式可得

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (5-6)$$

这一关系式说明,简谐振动的加速度和位移成正比而反向.

二、描述简谐振动的物理量

1. 振幅、周期、频率

在简谐振动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 中,余弦值在 +1 和 -1 之间,所以物体的位移亦在 A 和 $-A$ 之间.我们把简谐运动物体离开平衡位置最大位移的绝对值 A ,称为振幅.其大小由起始条件确定.

正、余弦函数是周期性函数,因此简谐振动是周期性运动,即每隔一固定时间间隔 T ,运动就完全重复一次,这个固定时间间隔 T 称为振动周期,按周期的定义

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t+T) + \varphi] \\ &= A\cos[\omega T + \omega t + \varphi] = A\cos[2\pi + \omega t + \varphi] \end{aligned}$$

故有
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5-7)$$

对于弹簧振子, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ω 称为弹簧振子的固有圆频率或角频率,而它的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5-8)$$

物体在单位时间内振动的次数称为频率,用 ν 表示,它的单位名称是赫兹,符号是 Hz. 显然频率和周期的关系为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5-9)$$

简谐振动方程又常写成

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad (5-10)$$

2. 相位和初相位

由(5-3)式和(5-4)式可看出,当振幅 A 和频率一定时,振动物体在任一时刻相对平衡位置的位移和速度都决定于 $(\omega t + \varphi)$,也就是说, $(\omega t + \varphi)$ 既决定了振动物体在任意时刻相对平衡位置的位移,也决定了它在该时刻的速度和加速度,量值 $(\omega t + \varphi)$ 叫做振动的相位,它是决定简谐振动物体运动状态的物理量.振动物体在完成

一次全振动的过程中,每一时刻物体的运动状态都不相同,而这种不同就反映在相位不同上.当 $t = 0$ 时,相位 $(\omega t + \varphi) = \varphi$,故 φ 叫做初相位,它是决定初始时刻振动物体运动状态的物理量.例如,若 $\varphi = 0$,则在 $t = 0$ 时,由(5-3)和(5-4)式得出 $x_0 = A, v_0 = 0$,这表示我们所选的计时起点,是物体位于正最大位移处,且速率为零的这 - 时刻.

3. 振幅和初相的确定

对于给定的弹簧振子,角频率 ω 是确定的,但弹簧振子还可以做振幅不同,初相位不同的谐振动.如果已知谐振动的初始条件 x_0, v_0 ,那么振幅 A 和初相位 φ 可以根据(5-3)式和(5-4)式确定.物体在 $t = 0$ 时的位移 x_0 和速度 v_0 叫做初始条件.

当 $t = 0$ 时, $x = x_0, v = v_0$,代入(5-3)式和(5-4)式得

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi \\ v_0 &= -\omega A \sin \varphi \end{aligned}$$

从而得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (5-11)$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega} \quad (5-12)$$

其中 φ 所在象限可由 x_0 及 v_0 的正负号确定.

总之,对于给定的振动系统,周期(或频率)由振动系统本身性质决定,而振幅和初相位由初始条件确定.

三、单摆

一根不会伸缩的细线,上端固定(或一根刚性轻杆,上端与无摩擦的铰链相连),下端悬挂一个很小的重物,把重物略加移动后就可于在竖直平面内来回摆动,这种装置称为单摆(图 5.2).当摆线竖直时,重物在其平衡位置 O 处.当摆线与竖直方向成 θ 角时,重物受到重力 G 和线的拉力 T 两个不共线力的作用(忽略摩擦力).重力的切向分量为 $mg \sin \theta$,它决定重物沿圆周的切向运动.设摆线长为 l ,则重物的切向加速度为 $a_t = l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$,考虑到角位移 θ 是从竖直位置算起,并规定沿逆时针方向

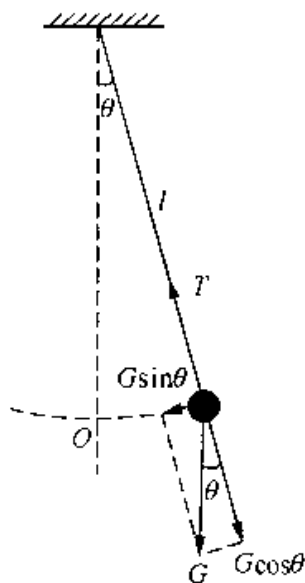


图 5.2 单摆

为正, 则重力的切向分力 $mg \sin\theta$ 与 θ 反向, 根据牛顿运动定律得

$$-mg \sin\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

当 θ 很小时, $\sin\theta \approx \theta$, 所以

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

式中 $\omega^2 = \frac{g}{l}$. 与式(5-2) 相比较可知, 单摆在摆角很小时, 在平衡位置附近作角谐振动, 其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5-13)$$

其振动表式为

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5-14)$$

式中 θ_m 是最大角位移, 即角振幅, φ_0 为初相位, 它们均由初始条件决定.

在单摆中, 物体所受的回弹力不是弹性力, 而是重力的切向分力, 在 θ 很小时, 此力与角位移 θ 成正比, 方向指向平衡位置, 虽然本质上不是弹性力, 但其作用完全和弹性力一样, 所以是一种准弹性力.

当 θ 角不是很小时, 物体所受的回弹力与 $\sin\theta$ 成正比, 物体不再作简谐振动. 由于 $\sin\theta$ 总是小于 θ , 所以, 当摆动幅角较大时, 单摆的振动周期将增大, 单摆的周期 T 与角振幅 θ_m 的关系为

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4 \frac{\theta_m}{2} + \dots \right)$$

其中 T_0 为 θ_m 很小时的周期. 式中含有 θ_m 的各项逐项变得越来越小, 因此只要在上述级数中取足够的项数就可以将周期计算到所要求的任何精确度. 例如 $\theta_m = 15^\circ$ 时, 实际的周期比 θ_m 很小时的周期相差不超过 0.5%.

单摆的振动周期完全决定于振动系统本身的性质, 即决定于重力加速度 g 和摆长 l , 而与摆球的质量无关. 在小摆角的情况下, 单摆的周期又与振幅无关, 所以单摆可用作计时, 单摆为测量重力加速度 g 提供了一种简便方法.

四、复摆

一个可绕固定轴 O 摆动的刚体称为复摆, 也称物理摆(图 5.3). 平衡时, 摆的重心 C 在轴的正下方. 摆动时, 重心与轴的连线 OC 偏离平衡时的竖直位置. 设在任一

时刻 t , 其间的夹角为 θ , 我们规定偏离平衡位置沿逆时针方向转过的角位移为正. 这时复摆受到对于 O 轴的力矩为

$$M = -mgh \sin\theta$$

式中的负号表明力矩 M 的转向与角位移 θ 的转向相反.

当摆角很小时, $\sin\theta \approx \theta$, 则

$$M = -mgh\theta$$

设复摆绕 O 轴的转动惯量为 J , 根据转动定律得

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta$$

或

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgh}{J}\theta = -\omega^2\theta$$

与式(5-2)相比较, 可知复摆在摆角很小时也在其平衡位置附近作简谐振动, 其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}} \quad (5-15)$$

上式表明复摆的周期也完全决定于振动系统本身的性质. 由复摆的振动周期公式可知, 如果测出摆的质量, 重心到转轴的距离, 以及摆的周期, 就可以求得此物体绕该轴的转动惯量. 有些形状复杂物体的转动惯量, 用数学方法进行计算比较困难, 有时甚至是不可能的, 但用振动方法可以测定.

例 5-1 一质点沿 x 轴作简谐振动, 振幅 $A = 0.12\text{m}$, 周期 $T = 2\text{s}$, 当 $t = 0$ 时, 质点对平衡位置的位移 $x_0 = 0.06\text{m}$, 此时刻质点向 x 正向运动, 求:

- (1) 此简谐振动的表达式;
- (2) 从初始时刻开始第一次通过平衡位置的时刻.

解 (1) 设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\text{s}^{-1}$, $A = 0.12\text{m}$ 已知. 只需求初相位 φ , 由初始条件 $t = 0$ 时, $x_0 = 0.06\text{m}$ 可得

$$0.06 = 0.12\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

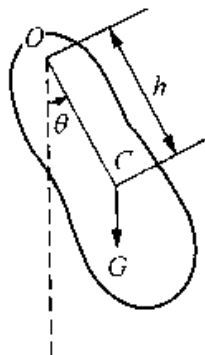


图 5.3 复摆

在 $-\pi$ 到 π 之间取值,得

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

这两个值取哪一个,要看初始速度条件,由于

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

所以

$$v_0 = -A\omega \sin\varphi$$

由于 $t = 0$ 时,质点向 x 正方向运动,所以 $v_0 > 0$

$$v_0 = -A\omega \sin\varphi > 0$$

$$\sin\varphi < 0 \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

于是简谐振动的表达式为

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

(2) 通过平衡位置时, $x = 0$, 由位移表达式得

$$0 = 0.12\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

由此可得
$$\omega t - \frac{\pi}{3} = (2k-1)\frac{\pi}{2} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

即
$$t = \frac{k\pi - \frac{\pi}{6}}{\omega}$$

由于是第一次通过平衡位置,应取 $k = 1, \omega = \pi \text{ s}^{-1}$

$$t = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{5}{6} = 0.83(\text{s})$$

例 5-2 如图 5.4 所示,一劲度系数为 k 的轻弹簧,下端固定于水底,上端系一直径为 d 的木质小球,小球的密度 ρ 小于水的密度.推动后,小球在水中沿铅直方向振动.假定不计水对小球的阻力和小球吸附的水的质量.开始时小球在水中处于平衡位置,并具有向上的初速度 v_0 ,试写出其振动表达式.

解 设振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

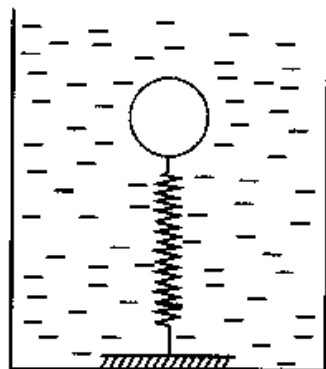


图 5.4

式中的

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6k}{\pi d^3 \rho}}$$

由初始条件 $t = 0$ 时, $x_0 = 0$, 初速度为 v_0 确定振幅和初相位, 因为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{\pi d^3 \rho v_0^2}{6k}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

所以振动表达式为

$$x = \sqrt{\frac{\pi d^3 \rho v_0^2}{6k}} \cos\left(\sqrt{\frac{6k}{\pi d^3 \rho}} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

§ 5.2 简谐振动的能量

以弹簧振子为例, 以弹簧原长 O 处为弹性势能零势能点, 则在 t 时刻, 物体的速度为 v , 系统的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (5-16)$$

若在 t 时刻, 物体的位移为 x , 系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (5-17)$$

由上两式可知, 系统的动能和势能都随时间 t 作周期性的变化. 当物体的位移最大时, 势能达到最大值 $\frac{1}{2}kA^2$. 但此时动能为零; 当物体的位移为零时, 势能为零, 而动能却达到最大值 $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$.

系统的总能量为动能和势能之和, 即

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

因 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, 所以有

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (5-18)$$

上式表明, 弹簧振子作简谐振动的总能量与振幅的二次方成正比. 总能量不随时间变化, 而且保持恒定. 这是因为弹簧振子作简谐振动的过程中, 只有系统的保守力内力做功, 其他非保守内力和外力均不做功, 所以系统的总能量守恒. 如图 5.5 所示, (设 $\varphi = 0$)

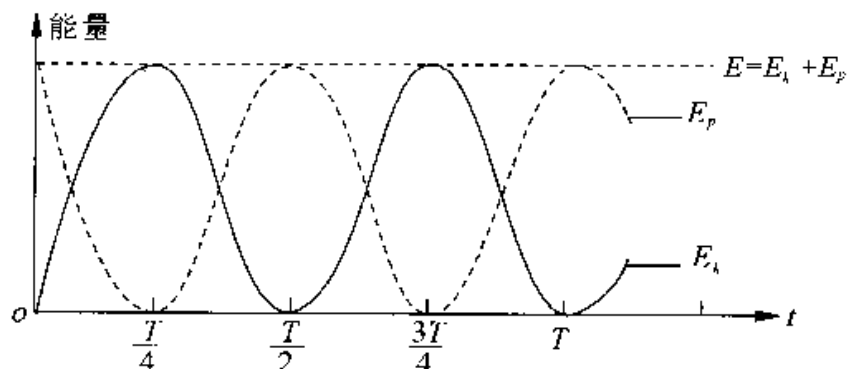


图 5.5

在许多问题的研究中, 需要简谐振动动能和势能在一个周期 T 的平均值 \bar{E}_k 和 \bar{E}_p

根据对时间的平均值的定义有

$$\bar{E}_k = \frac{1}{T} \int_0^T E_k dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{4} kA^2 \quad (5-19)$$

$$\bar{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T E_p dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{4} kA^2 \quad (5-20)$$

即简谐振动在一个周期内平均势能和平均动能相等.

我们从 $E = \frac{1}{2} kA^2$ 可知, 振幅越大, 振动越强烈, 振动能量也就越大, 所以, 振幅的平方可用来表征简谐振动的强度, 这一结论不仅对于弹簧振子, 而且对于其它形式的简谐振动系统(例如单摆)也是正确的.

能量方法常用来求解振动系统的固有频率, 工程实际中会经常用到这种方法.

例 5-3 试用能量守恒推导出简谐振动的微分方程.

解 已知系统的能量为

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{常量}$$

对上式求导得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$$

$$mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

因为

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

所以

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

这种方法对解决工程中的非机械振动问题十分有利,因为那时不宜采用受力分析的方法了.

例 5-4 一个 3.0kg 的质点按下面方程作谐振动 $x = 5.0\cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{4})$, 式中 x, t 的单位分别为 m 和 s, 试问: (1) x 为什么值时, 势能等于总能量的一半? (2) 质点从平衡位置到这一位置需要多长时间?

解 (1) 势能为总机械能一半的条件是

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

即当 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm \frac{5}{2}\sqrt{2}$ (m) 时, 势能等于总能量的一半.

(2) 先求从平衡位置到 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}A$ 处需用的最少时间, 这要求 $\frac{dx}{dt} > 0$, 设在平衡位置的时刻为 t_1 , 则

$$5.0\cos(\frac{\pi}{3}t_1 - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad -5.0 \times \frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{3}t_1 - \frac{\pi}{4}) > 0$$

所以

$$\frac{\pi}{3}t_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \quad (1)$$

设到达 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}A$ 位置的时刻为 t_2 , 这时振子继续沿 $\frac{dx}{dt} > 0$ 的方向运动, 于是有

$$A\cos(\frac{\pi}{3}t_2 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}A \quad -5.0 \times \frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{3}t_2 - \frac{\pi}{4}) > 0$$

所以

$$\frac{\pi}{3}t_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

由式(2)减去式(1)得

$$\frac{\pi}{3}(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{4}$$

所以,由平衡位置到达 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}A$ 处需要的最少时间为

$$\Delta t = \frac{3}{4}s = 0.75s$$

同理,从平衡位置沿 x 轴负向到到达 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 处需要的最少时间也是 $0.75s$.

§ 5.3 简谐振动的旋转矢量表示法

本节介绍描述简谐振动的另一种方法,旋转矢量表示法.如图 5.4 所示,自 x 轴的原点 O 作一矢量 A ,使它的模等于振动的振幅 A .并使矢量 A 在 oxy 平面内绕 O 点以 ω 逆时针转动,其角速度与振动角频率 ω 相等,这个矢量就叫做旋转矢量.设 $t=0$ 时,矢量 A 与 ox 轴的夹角为 φ ,在 t 时刻,矢量 A 沿逆时针方向转过了角度 ωt ,与 ox 轴的夹角为 $\omega t + \varphi$,这时矢量 A 在 x 轴上的投影为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

这正是简谐振动的运动学方程.可见,匀速旋转矢量 A 在 x 轴上的投影可用来表示简谐振动,这种方法称为简谐振动矢量图示法.

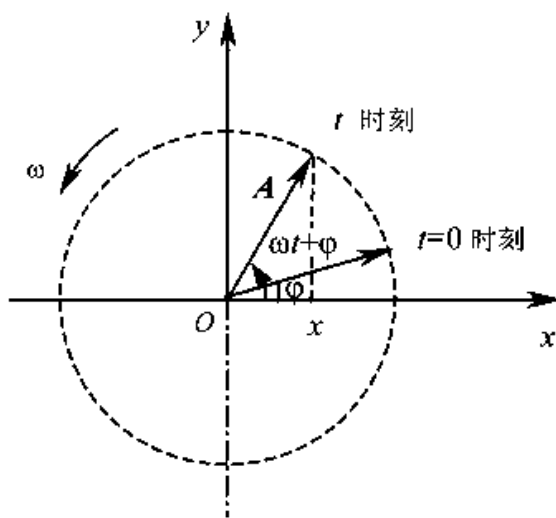


图 5.6 旋转矢量图

矢量图示法不仅可以确定作简谐振动的物体的位移 x ,而且也可以确定它的速度 v 和加速度 a .

由振动速度 $\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ 可知,作一简谐振动的速度矢量 v ,使它的模等于 $A\omega$,相位较矢量 A 超前 $\frac{\pi}{2}$ 并以 ω 逆时针方向旋转,矢量 v 在 x 轴上的投影正是简谐振动速度的表达式.

由振动加速度 $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$ 可知,作加速度

矢量 \mathbf{a} , 使它的模等于 $A\omega^2$, 相位较矢量 \mathbf{A} 超前 π 并以 ω 逆时针方向旋转, 矢量 \mathbf{a} 在 x 轴上的投影正是简谐振动加速度的表达式, 如图 5.7 所示.

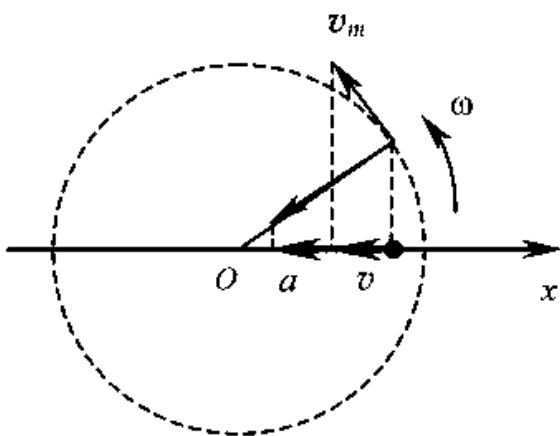


图 5.7 旋转矢量图中的速度和加速度

例 5-5 一个沿 x 轴作简谐振动的弹簧振子, 振幅为 A , 周期为 T , 其振动方程用余弦函数表出. 如果在 $t = 0$ 时, 质点状态分别是

- (1) $x_0 = -A$;
- (2) 过平衡位置向正向运动;
- (3) 过 $x = \frac{A}{2}$ 处向负向运动;
- (4) 过 $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正向运动.

试求出相应的初相位之值, 并写出振动方程.

解 (1) 根据题意, $t = 0$ 时, 旋转矢量的位置, 如图 5.8 所示, 从而得 $\varphi = \pi$, 故振动方程为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$$

(2) 根据题意, $t = 0$ 时, 旋转矢量的位置如图 5.8 所示, 从而得 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, 故振动方程为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(3) 根据题意, $t = 0$ 时, 旋转矢量的位置如图 5.8 所示, 从而得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故振动方程为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(4) 根据题意, $t = 0$ 时, 旋转矢量的位置如图 5.6 所示, 从而得 $\varphi = \frac{5}{4}\pi$, 故振动方程为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{5}{4}\pi\right)$$

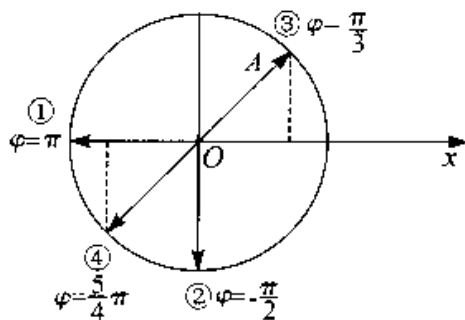


图 5.8

§ 5.4 简谐振动的合成

在工程和生活中,常会遇到一个质点同时参与两个振动的情况,例如,当两个声波同时传播到空间某一点时,该点处的空气质元就被迫同时参与两个振动,这时空气质元的振动,就是这两个振动的合成.振动的合成一般是比较复杂的,我们只讨论几种简单的简谐振动的合成.

一、两个同方向同频率简谐振动的合成

1. 解析法

在两个惯性系 S 、 S' 中, x 轴与 x' 轴重合, y 轴与 y' 轴, z 轴与 z' 轴平行,若 S' 系相对 S 系沿 x 轴作简谐振动, O' 点相对 S 系的振动方程为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

在 x' 轴上有一质点相对 S' 系作简谐振动,振动方程为

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则该质点相对 S 系的振动方程为

$$x = x_1 + x_2 \quad (5-21)$$

这就是两个同方向同频率简谐振动的合成.

下面我们讨论合振动的表示式、振幅和初相位.由(5-21)式得

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= A_1 \cos\varphi_1 \cos\omega t - A_1 \sin\varphi_1 \sin\omega t + A_2 \cos\varphi_2 \cos\omega t - A_2 \sin\varphi_2 \sin\omega t \\ &= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) \cos\omega t - (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) \sin\omega t \end{aligned}$$

$$\text{若令} \quad A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = A \cos\varphi \quad (5-22)$$

$$A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 = A \sin\varphi \quad (5-23)$$

代入上式得合振动的表示式

$$x = A \cos\varphi \cos\omega t - A \sin\varphi \sin\omega t = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5-24)$$

可见两个同方向同频率简谐振动的合成运动仍为简谐振动.将(5-22), (5-23)式分别平方,然后相加得合振动的振幅,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (5-25)$$

由(5-22)除以(5-23)得合振动的初相位

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \\ \varphi &= \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (5-26)$$

2. 旋转矢量合成法

用谐振动的旋转矢量表示法, 研究同方向同频率谐振动的合成, 可以很方便地得到上述结果.

令 A_1 和 A_2 以相同的匀角速度 ω 绕 O 点旋转, 见图 5.9(a), 当 $t=0$ 时, 矢量 A_1 和 A_2 与 x 轴间的夹角分别为 φ_1 和 φ_2 , 已知 A_1, A_2 在 x 轴上的投影 x_1, x_2 分别代表两个同方向同频率的谐振动

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

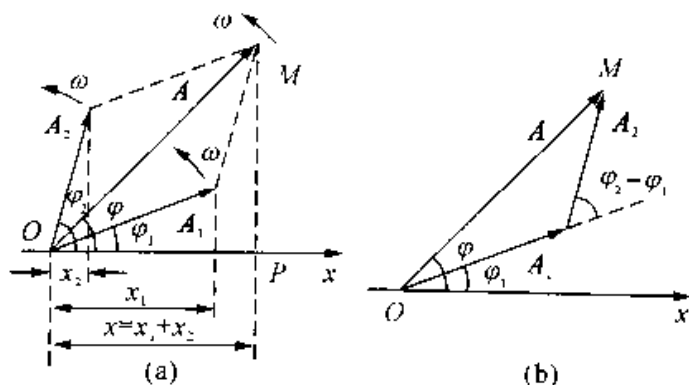


图 5.9

以 A_1, A_2 为邻边作平行四边形, 得合矢量 A , 合矢量 A 与 x 轴间的夹角为 φ , 由于 A_1 和 A_2 长度都不变, 且以相同角速度绕 O 点旋转, 所以它们的合矢量 A 的长度也不变, 而且也是以匀角速度 ω 绕 O 点旋转 (在矢量旋转过程中, 整个平行四边形可视为一不变形的整体). 因此合矢量 A 在 x 轴上的投影 x 所代表的运动也是谐振动, 而且它的频率与 A_1, A_2 矢量投影所代表的谐振动频率相同. 根据矢量投影定理可知, 合矢量 A 在 x 轴上的投影 x 等于矢量 A_1, A_2 在 x 轴上投影 x_1 和 x_2 的代数和, 即

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

也就是说, 旋转矢量 A 在 x 轴上的投影 x 就代表 x_1, x_2 两个谐振动的合成谐振动的位移.

根据平行四边形法则, 可求得合成谐振动的振幅 A ,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

合成谐振动的初相 φ , 从图 5.9 可看出为

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

这一结果与前面用解析法求得的结果一致.

从(5-21)式可以看出, 合振动的振幅不仅与 A_1, A_2 有关, 而且还与原来两个谐振动的初相位差有关.

讨论: (1) 若原来的两个谐振动是同相位的, 即相位差是 $2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos 2k\pi = 1$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

说明合振幅最大.

(2) 若原来的两个谐振动是反相位的, 即相位差是 $(2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$$

说明 A 永远为正, 合振幅最小.

(3) 当 $\varphi_2 - \varphi_1$ 为其它值时, 合振幅的值在 $A_1 + A_2$ 与 $|A_1 - A_2|$ 之间.

相位差是一个重要的概念, 其原因有二, 一是对研究两个谐振动的叠加起着决定性作用, 二是决定两个振动的步调是否一致(如是否同时达到最大位移, 是否同时同方向过平衡位置等)

步调一致: 角频率相同时, 步调是否一致, 由二者初相位决定, 若两个谐振动的初相位相同, 则在任一时刻位移与振幅之比相等

$$\frac{x_1}{A_1} = \frac{x_2}{A_2}$$

速度与最大速度之比相等

$$\frac{v_1}{A_1\omega} = \frac{v_2}{A_2\omega}$$

这就叫步调一致.

步调不一致: 若两谐振动的相位不相等, 步调就不一致, 就会出现孰先孰后的问题.

两个频率相同的谐振动 ① 和 ②, 它们的运动方程为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则 $\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$, 称为两谐振动的相位差.

如果 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$, 就说谐振动 ② 的相位超前于谐振动 ① 的相位 $\Delta\varphi$.

如果 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$, 谐振动 ② 的相位落后于谐振动 ① 的相位 $\Delta\varphi$.

如果 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$, 两振动的步调完全一致, 称这两个谐振动同相或同步.

如果 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$, 两振动的步调完全相反, 称这两个谐振动为反相.

二、两个同方向不同频率的简谐振动的合成

为了讨论方便, 假定两振动的振幅和初相位是相同的, 两个分振动的表达式可分别写成

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

合振动的表达式为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi) = \\ &= A[\cos\varphi\cos\omega_1 t - \sin\varphi\sin\omega_1 t + \cos\varphi\cos\omega_2 t - \sin\varphi\sin\omega_2 t] \\ &= A[\cos\varphi(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) - \sin\varphi(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t)] \\ &= A\left[2\cos\varphi\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - 2\sin\varphi\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right] \\ &= 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t(\cos\varphi\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \sin\varphi\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t) \\ &= 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi) \end{aligned} \quad (5-27)$$

可见两个同方向不同频率的简谐振动的合运动, 不再是简谐振动, 甚至它都不一定是周期运动.

当两个分振动频率较大而相差很小时, 即两振动频率略有差异, $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$, 由于 $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$, 5-23 式可看成振幅为 $\left|2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right|$, 角频率为 $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 的近似的简谐振动, 这种振动称为拍. 由于振幅周期性的改变, 振动出现忽强忽弱的现象. 振动合成图线如图 5.10 所示, 振幅变化的频率称为拍频. 由于余弦函数 $2A\cos$

$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ 的频率为 $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$, 则 $\left|2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right|$ 的频率是 $2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ 的二

倍,因此拍频为

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2 \quad (5-28)$$

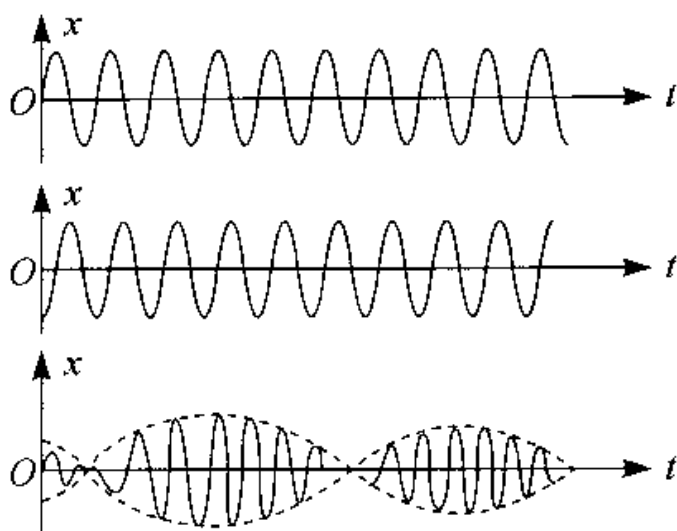


图 5.10

即拍频等于两个分振动频率之差,常用拍频测定频率.

当两个分振动具有倍数频率时,如图 5.11 所示,曲线 1 表示频率 $\nu_1 = 3\text{Hz}$,曲线 2 表示频率 $\nu_2 = 1\text{Hz}$,将二曲线相应的纵坐标相加,即得合振动曲线 3,它是一个复杂的振动.

由图可知, $\nu_2 = 3\nu_1$, $T_1 = 3T_2$,即在较慢的振动的一个周期内,包含有整数次较快的振动. $n = \frac{\nu_2}{\nu_1}$,结果合振动的周期或频率与较慢的振动相同, T_1 为主周期, ν_2 为主频率.

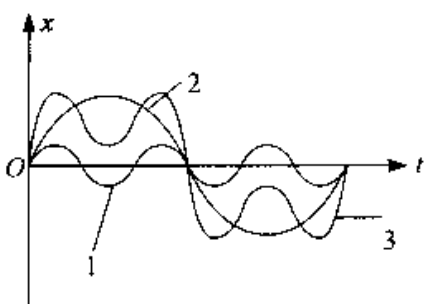


图 5.11

三、两个互相垂直的同频率简谐振动的合成

一个质点同时参与两个不同方向的振动,它的合位移是两个分位移的矢量和,在一般情况下,这时质点在平面上作曲线运动,它的轨道形状取决于两个振动的周期、振幅和相位差.

设两个振动分别在 x 轴和 y 轴上进行,其振动方程分别为

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (5-29)$$

分别展开以上两式得

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \quad (\text{a})$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2 \quad (\text{b})$$

将式(a)乘以 $\cos\varphi_2$, 式(b)乘以 $\cos\varphi_1$, 然后相减得

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = \sin\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (\text{c})$$

将式(a)乘以 $\sin\varphi_2$, 式(b)乘以 $\sin\varphi_1$, 然后相减, 得

$$\frac{x}{A_1} \sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin\varphi_1 = \cos\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (\text{d})$$

将式(c)、(d)分别平方后, 然后相加, 得到合振动的轨道方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5-30)$$

这是椭圆方程, 设 $A_1 > A_2$, 则椭圆的形状可以由两个分振动的相位差 $\varphi_2 - \varphi_1$ 决定. 下面讨论几种特殊情形.

(1) 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 时, 即两个分振动同相, (5-30) 式化为

$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0$$

质点的运动轨道是通过坐标原点的一条直线, 斜率为 $\frac{A_2}{A_1}$ (图 5.12(a))

(2) 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 时, 两分振动反相, 由(5-30) 式得

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$$

质点的运动轨道仍是通过坐标原点的一条直线, 但斜率为 $-\frac{A_2}{A_1}$ (图 5.12(b))

(3) 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ 时, x 落后于 y 为 $\frac{\pi}{2}$, 由(5-30) 式得

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

这是以坐标轴为主轴的椭圆方程, 质点沿顺时针方向运动(右旋)[图 5.12(c)]

(4) 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ 时, y 落后 $\frac{\pi}{2}$, 由(5-30) 式得

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

但质点沿椭圆逆时针方向运动(左旋)(图 5.10(d))

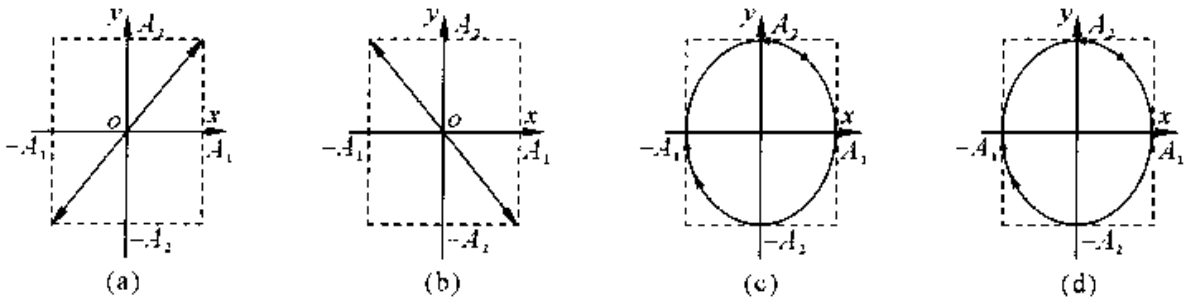


图 5.12

$\varphi_2 - \varphi_1$ 为一般值时, (5-30) 式是主轴不在坐标轴上的椭圆方程, 因此合成振动的轨道依图 5.13 所示的次序不断变化, 由直线变成椭圆再变成直线等.

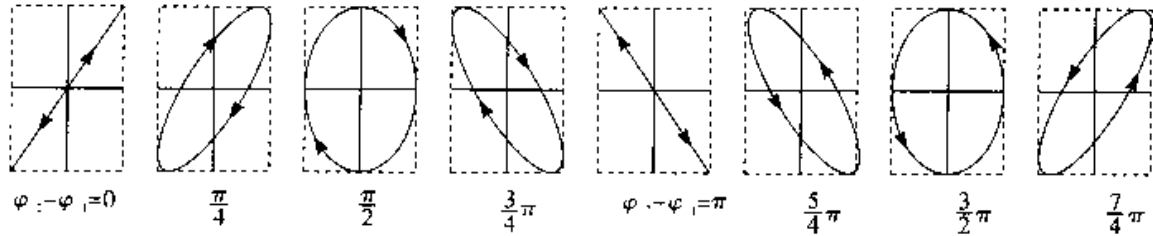


图 5.13

四、两个互相垂直的不同频率简谐振动的合成

如果两个相互垂直简谐振动的频率不同, 合成运动就比较复杂, 而且轨迹也不稳定. 只有当两振动频率有简单的整数比时, 合振动才具有稳定闭合的轨道, 这种轨道称为李萨茹图形, 如图 5.14 所示, 给出了两个振动频率之比为 $1:2, 1:3, 2:3$ 时的李萨茹图形. 常用李萨茹图形测定频率.

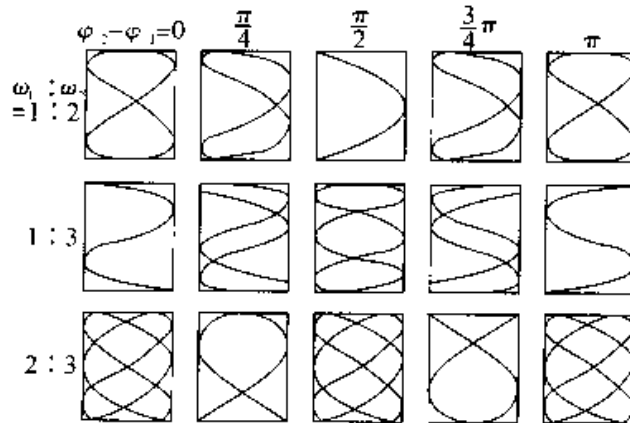


图 5.14 李萨茹图形

例 5-6 两质点沿着同一条直线作频率和振幅均相同的谐振动, 当它们每次沿相反方向互相通过时, 其位移为振幅的一半, 试问它们之间的相位差是多少?

解 设两谐振动的运动方程为

$$x_1 = A \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$x_2 = A \cos(\omega t - \varphi_2)$$

依题意有

$$\begin{cases} \frac{A}{2} = A \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \frac{A}{2} = A \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_1) > 0 \quad (\text{或} < 0)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_2) < 0 \quad (\text{或} > 0)$$

按第一种情况有

$$\cos(\omega t_1 + \varphi_1) = \frac{1}{2} \quad \sin(\omega t_1 + \varphi_1) < 0$$

$$\cos(\omega t_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2} \quad \sin(\omega t_1 + \varphi_2) > 0$$

所以

$$\omega t_1 + \varphi_1 = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \omega t_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n \text{ 为整数})$$

故

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$$

同理, 第二种情况, 有

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$$

§ 5.5 阻尼振动

简谐振动的机械能是守恒的, 是一种无阻尼的自由振动. 而实际的振动总要受到阻力的作用, 使得其机械能不断地转化成其它形式的能量. 同时, 由于振动系统与其周围弹性介质的相互作用而向外传播形成波. 系统的机械能不断地减少, 由于能

量与振幅的二次方成正比,因此振幅将逐渐地减小,这种振幅随时间减小的振动称为阻尼振动。

通常的振动系统都处在空气或液体中,它们受到的阻力就来自它们周围的这些介质.实验指出,当运动物体的速度不太大时,介质对运动物体的阻力与速度成正比.又由于阻力总与速度方向相反,所以阻力 f 与速度 v 就有下面关系

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

由牛顿第二定律有

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5-31)$$

令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{\gamma}{m}$$

ω_0 为振动系统的固有角频率, β 称为阻尼系数,则上式可写成

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5-32)$$

这就是阻尼振动满足的微分方程.这是一个二阶线性常系数齐次微分方程.这里只从物理方面简单介绍它的几种解的物理意义.

(1) 小阻尼情况($\beta^2 < \omega_0^2$), (5-32) 式的通解 x 为

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi) \quad (5-33)$$

式中的 A, φ 是由初始条件决定的常数, (5-33) 式就是阻尼振动方程, 阻尼振动图线如图 5.15 所示.

阻尼振动方程中的 $A_0 e^{-\beta t}$ 可以看作振幅, 振幅随时间按指数规律衰减, 这样的振动称为衰减振动. 阻尼越大衰减越快, 阻尼振动不是严格的周期振动, 这时仍把 ω 看作角频率, 则阻尼振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (5-34)$$

阻尼振动的周期大于振动系统的固有周期. 阻尼振动的周期不仅决定于弹簧振子本身的性质, 还与阻尼大小有关.

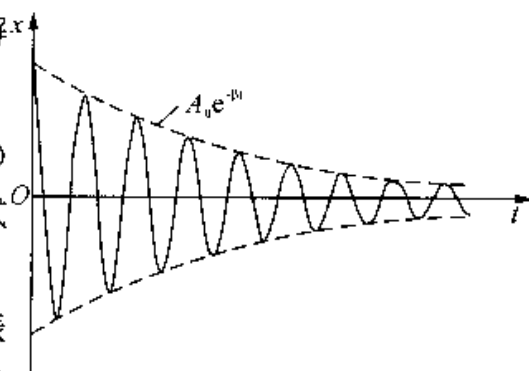


图 5.15

(2) 大阻尼情况($\beta^2 > \omega_0^2$), (5-32) 式的通解为

$$x = Ae^{-(\beta-\omega)t} + Be^{-(\beta+\omega)t} \quad (5-35)$$

式中 A, B 是由初始条件决定的常数. 在大阻尼的情况下, 物体从开始的最大位移处缓慢地逼近平衡位置, 完全不可能作往复运动了, 这种情况称为过阻尼, 见图 5.16 曲线 b.

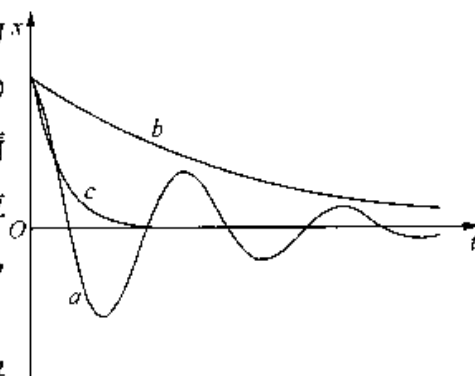


图 5.16

(3) 临界阻尼情况($\beta^2 = \omega_0^2$), (5-32) 式的通解

为

$$x = e^{-\beta}(At + B) \quad (5-36)$$

式中 A, B 是由初始条件决定的常数. $\beta^2 = \omega_0^2$, 则 $\omega = 0$ 是物体不能作往复运动的临界情况, 这时物体将从最大位移处逐渐回到平衡位置并静止下来, 这种情况称为临界阻尼, 见图 5.17 中曲线 c.

§ 5.6 受迫振动 共振

一、受迫振动

前面所讨论的振动系统, 一旦受外界扰动而离开平衡位置, 就能自行振动; 在振动过程中, 振动物体除受到回复力、阻力外还受一个维持振动的周期性变化力的作用, 这时物体的振动称为受迫振动.

设作用在振动系统上的力除回复力、阻力以外, 还受一个驱动力 F , 设 $F = F_0 \cos \omega t$, 其中 ω 为驱动力的角频率, 物体作受迫振动的动力学方程为

$$-kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

令

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{\gamma}{m} = 2\beta, \frac{F_0}{m} = f_0$$

上式写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (5-37)$$

上述微分方程的解为

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5-38)$$

即受迫振动是由阻尼振动 $A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 和简谐振动 $A \cos(\omega t + \varphi)$ 合成的。

受迫振动一开始是相当复杂的,经过一段时间以后,阻尼振动就衰减到可以忽略不计,(5-38)式右边第一项就趋于零,受迫振动达到稳定状态,这时,振动的周期即是驱动力的周期,振动的振幅保持稳定不变,于是受迫振动变为简谐振动,有

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5-39)$$

式中振动的角频率就是驱动力的角频率,而振幅 A 、初相位 φ 既和振动系统的性质及阻尼情况有关,也和驱动力的频率及力幅有关。 A 、 φ 由下述两式决定

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} \quad (5-40)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5-41)$$

二、共振

现在,我们由(5-40)式来讨论稳定状态下受迫振动的振幅 A 与驱动力的角频率 ω 之间的关系,在不同的阻尼系统 β 的情形下,这两者之间的关系可按(5-40)式大致画出,如图 5.17 所示。由图可见,当驱动力的角频率 $\omega \gg \omega_0$ 或 $\omega \ll \omega_0$ 时,受迫振动的振幅较小,当 ω 与 ω_0 接近,受迫振动的振幅较大,在 ω 为某一定值时,振幅达到最大值,我们把驱动力的角频率为某一定值时,受迫振动的振幅达到极大的现象叫做共振,共振时的角频率叫做共振角频率 ω_r 。利

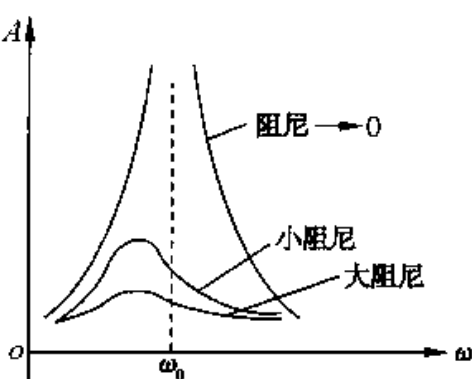


图 5.17

用求函数极值的方法,求共振角频率 ω_r ,对(5-40)式求导数,并令其为零,即

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left[\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}} \right] \\ &= \frac{2\omega f_0}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + 4\beta\omega^2} (\omega_0^2 - 2\beta^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned}$$

可见,当 $\omega_0^2 - 2\beta^2 - \omega^2 = 0$ 时,振幅 A 有最大值,这时驱动力的角频率 ω 等于共振角频率 ω_r ,即

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (5-42)$$

因此,共振角频率 ω_r 是由固有角频 ω_0 和阻尼系数 β 决定的. 将式(5-42)代入式(5-40)和式(5-41)可得共振时的振幅和初相分别为

$$A_r = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (5-43)$$

$$\varphi_r = \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \quad (5-44)$$

由式(5-43)和式(5-44)可知,阻尼系数 β 越小,共振角频率 ω_r 越接近固有角频率 ω_0 ,同时共振振幅 A_r 也越大.若阻尼系数 $\beta \rightarrow 0$,则 $\omega_r \rightarrow \omega_0$,振幅将趋于无限大.

应该注意,在实际的振动系统中, β 不可能为零,所以总是存在能量的损耗,而且振动越强烈,损耗越大,因此,振幅增大到一定程度时,外界提供给系统的能量全部都损耗掉,振幅不再增大,也就是说, β 越小,共振时而达到的振幅极大值也越大,但不会变为无限大.

三、用薄板共振控制噪声

控制噪声的基本原则是设法将噪声的能量转化为其它形式的能量.其中一种常用的方法是利用薄板共振消除噪声.

所谓薄板共振结构就是将薄的胶合板、硬质纤维板、木板或金属板等的周边固定在紧贴墙面的框架上,并与墙之间留有-一定厚度的空气层.当声波射到薄板上时,引起板的振动,使板发生弯曲变形.由于薄板与固定支点之间的摩擦,以及板本身的内耗使振动的能量转化为热量.若入射波的频率等于系统的固有频率,那么系统发生共振.此时振幅达到最大值,相应的噪声能量消耗也最大,从而达到控制噪声之目的.

为计算薄板共振结构系统的固有频率,可将系统视为如图 5.18 所示的“活塞式”的空气弹簧.

设板的面积为 A ,质量为 m (板的质量密度为 $\sigma = m/A$),空腔深度(薄板与墙间距离)为 D ,腔内气体的压强为 p .当声波传至薄板时,板面发生变形.设想板沿 x 轴正向的位移为 x ,腔内气体的压强增至 $p + dp$.由于声速约为数百米每秒,比热传递的速度快得多,所以腔内气体状态的变化过程可近似视为绝热过程.由理想气体绝热过程方程

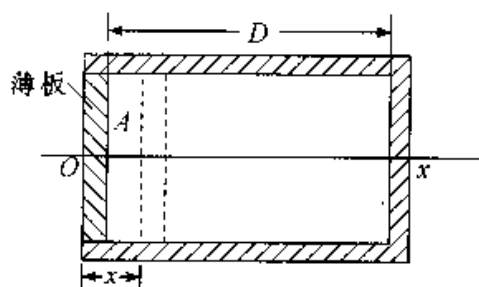


图 5.18

$$pV^\gamma = C (\gamma = C_p/C_v)$$

两边求微分,有

$$V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0$$

令 $\alpha = -\frac{dV}{V}$, 由上式可得空腔内外的压强差为

$$dp = \gamma \alpha p$$

于是作用于板上的合力为

$$\sum F = -Adp = -\gamma A \alpha p$$

由牛顿运动定律,上式可写成

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma A \alpha p$$

或
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\gamma A \alpha p}{m} \quad (5-45)$$

由于 $\frac{m}{A} = \sigma$ 及 $\alpha = -\frac{dV}{V} = -\left(\frac{-xA}{DA}\right) = \frac{x}{D}$, 代入式(5-45)得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma p}{\sigma D} x = 0$$

式中, γ, p, σ, D 均为常量, 取 $\omega_0^2 = \gamma p / \sigma D$, 上式为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

这是谐振动方程, 可见, 系统的固有频率为

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma p}{\sigma D}} \quad (5-46)$$

已知在标准状态下空气的 $\gamma = 4/3, p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, 以此代入式(5-46), 有

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.4 \times 10^7}{\sigma D}} = \frac{60}{\sqrt{\sigma D}} \quad (5-47)$$

由式(5-47)可见, 系统的固有频率与其空腔的深度 D 和反的面密度 σ 有关. 当入射声波的频率 f 等于系统的固有频率 f_0 时, 系统发生共振. 从而可最大的消耗与此频率相应的声能, 使该频率的噪声得以消除. 如以 D 为横坐标, 以 σ 为纵坐标, 由式(5-47)和实验可得出如图 5.19 所示的图线. 如薄板的厚度为 5mm, 质量面密度为 $\sigma = 4 \text{ kg/m}^2$, 当空腔厚度 $D = 30 \text{ mm}$ 时, 从图 5.19 中可直接查出其结构的共振频率 $f_0 = 200 \text{ Hz}$, 说明该结构可控制 200 Hz 频率的噪声, 实用木质薄板吸声结构, 其厚度一

一般取 3—6 mm, 空气腔厚度 D 取 30—100 mm. 因此, 共振频率在 100—300 Hz 之间, 可控制的噪声也在此范围之内.

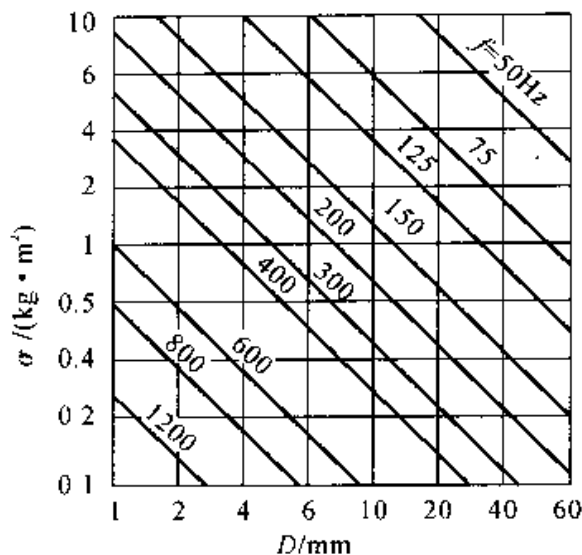


图 5.19

思考题

5-1 什么是简谐振动?试分别从运动学和动力学的角度来解释.

5-2 什么是相位?一个单摆由最左位置开始向右方(开始计时),在最左端相位是多少?经过中点、到达右端,再回中点,返回左端等各处的相应相位是多少?初相位是多少?

5-3 振动最基本的特性是什么?对弹簧振子而言,若弹簧的劲度系数一定,试讨论惯性对周期的影响.

5-4 在什么情况下,简谐振动的速度和加速度是同号的?在什么情况下是异号的?加速度为正值时,振动质点一定是加快地运动吗?反之,加速度为负值时,肯定是减慢地运动吗?

5-5 简谐振动是否一定是无阻尼自由振动?无阻尼振动是否一定是简谐振动?

5-6 对于频率不同的两个简谐振动,初相相等,能否说这两个简谐振动是同相?

5-7 有人说“质点作简谐振动时,从平衡位置运动到最远点需时 $\frac{1}{4}$ 周期,因此走过该距离的一半需时 $\frac{1}{8}$ 周期。”此说法是否正确?说明理由.

5-8 求初相位有哪些方法?举例说明.

5-9 一质点作简谐振动,则其速度的平均值为零,为什么?加速度的平均值呢?速率的平均值呢?动能和势能的平均值呢?

5-10 (1) 有两个弹簧振子,其生物质量相同,即 $m_1 = m_2$,但劲度系数 $k_1 \neq k_2$,已知振动周期 $T_1 = 2T_2$,且又知 $A_1 = 2A_2$,它们的振动能量是否相等?

(2) 若 $m_1 \neq m_2, k_1 = k_2, T_1 = 2T_2, A_1 = 2A_2$,它们的振动能量是否相等?

习 题

5-1 如图 5.20 所示,弹簧振子放在倾角为 α 的光滑斜面上,弹簧一端固定,则该弹簧振子的频率为().

A. $\gamma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m \sin \alpha}}$

B. $\gamma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

C. $\gamma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k \sin \alpha}{m}}$

D. $\gamma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \alpha$

5-2 一质点作简谐振动,振动方程为 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$,当时间 $t = \frac{1}{2}T$ (T 为周期) 时,质点的速度为().

A. $-A\omega \sin \varphi$

B. $A\omega \sin \varphi$

C. $-A\omega \cos \varphi$

D. $A\omega \cos \varphi$

5-3 如图 5.21 为光滑圆弧形轨道,半径为 R ,在圆心处,放置小球 A ,圆心竖直下方 C 点旁边放一个与 A 完全相同的小球 B , B 、 C 两点非常靠近,现让 A 、 B 同时运动,则小球到达 C 点的情况是().

A. A 先到

B. B 先到

C. 同时到

D. 无法判断

5-4 一质点作简谐振动,其运动速度与时间的曲线如图 5.22 所示,若质点的振动规律用余弦函数描述,则其初相位应为().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $-\frac{5\pi}{6}$

D. $-\frac{\pi}{6}$

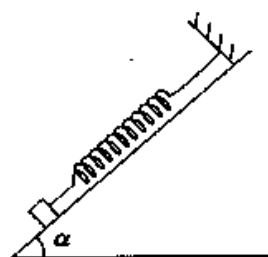


图 5.20

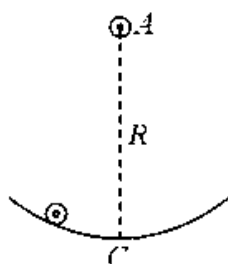


图 5.21

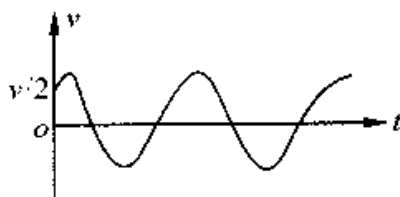


图 5.22

5-5 如图 5.23 所示为质点作简谐振动时的 $x-t$ 曲线, 则质点的振动方程为()。

A. $x = 0.2 \cos(\frac{2\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3})m$

B. $x = 0.2 \cos(\frac{2\pi}{3}t - \frac{2\pi}{3})m$

C. $x = 0.2 \cos(\frac{4\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3})m$

D. $x = 0.2 \cos(\frac{4\pi}{3}t - \frac{2\pi}{3})m$

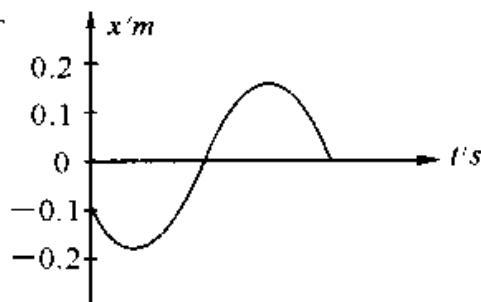


图 5.23

5-6 一谐振子作振幅为 A 的谐振动, 它的动能与势能相等, 它的相位和坐标分别为()。

A. $\pm \frac{\pi}{3}$ 和 $\pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{1}{2}A$

B. $\pm \frac{\pi}{6}$ 和 $\pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}A$

C. $\pm \frac{\pi}{4}$ 和 $\pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}A$

D. $\pm \frac{\pi}{3}$ 和 $\pm \frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}A$

5-7 如图 5.24 所示, 一轻弹簧劲度系数为 k , 竖直地固定在地面上, 其上放一质量为 m 的木块, 平衡时系统的弹性势能为()。

A. $2m^2g^2/k$

B. $m^2g^2/2k$

C. 0

D. m^2g^2/k

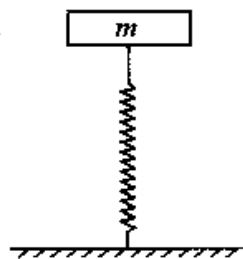


图 5.24

5-8 一弹簧振子, 振动方程为 $x = 0.1 \cos(\pi t - \frac{\pi}{3})m$, 若振子从 $t = 0$ 时刻到达 $x = -0.05m$ 处, 且向 x 轴负向运动, 则所需的最短时间为()。

A. $\frac{1}{3}S$

B. $\frac{5}{3}S$

C. $\frac{1}{2}S$

D. 1S

5-9 已知作谐振动物体的周期 $T = \frac{1}{2}$ S, 某刻, 物体的位移 $x = 3 \times 10^{-2}$ m,

速度 $v = -12\sqrt{3}\pi \times 10^{-2}$ m/s, 加速度 $a = -48\pi^2 \times 10^{-2}$ m/s², 经时间 $t = \frac{1}{2}$ S, 则 $x = 3 \times 10^{-2}$ m, $v =$ _____ m/s, $a =$ _____ m/s².

5-10 有如图 5.25 的一个系统, 两弹簧的劲度系数为 k_1 和 k_2 , 质量忽略不计, 滑块质量为 M , 它与水平桌面间无摩擦; 另一质量为 m , 置于 M 上, 它与 M 间的摩擦因数为 μ , 则 m 能随 M 一起运动时, M 的最大位移是 _____.

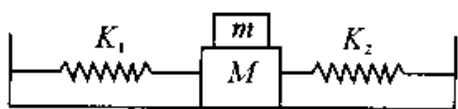


图 5.25

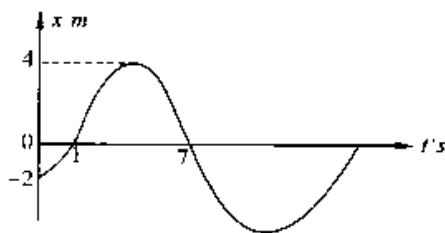


图 5.26

5-11 一振子 A 的振动曲线如图 5.26 所示, 另有一完全相同的振子 B 在同一计时起点, B 的初相位 φ_2 和振子 A 的初相位 φ_1 之差为 $\varphi_1 - \varphi_2 = -2\pi/3$, 则振子 B 的振动方程为 $x =$ _____.

5-12 在一平板上放一重量为 1kg 的物体, 平板在铅直方向作上下谐振动, 周期为 0.5s, 振幅为 0.02m, 则在位移最大时, 物体对平板的压力为 _____, 平板振动振幅超过 _____ m 时, 物体将离开平板. ($g = 9.8$ m/s²)

5-13 一质量为 M 的物体在光滑水平面上作简谐振动, 振幅是 12cm, 在距平衡位置处 6cm 速度是 24m/s, 该谐振动的周期 $T =$ _____ S, 当速度是 12m/s 时物体的位移为 _____ cm.

5-14 如图 5.27 所示, 一劲度系数 $k = 3.16$ N/m 的轻弹簧一端连一质量 $m = 2.0 \times 10^{-2}$ kg 的滑块, 放在光滑的水平面上, 弹簧另一端固定. 今把弹簧压缩 2.4×10^{-2} m 后放手, 任其自由振动, 以放手时刻为计时起点, 求:

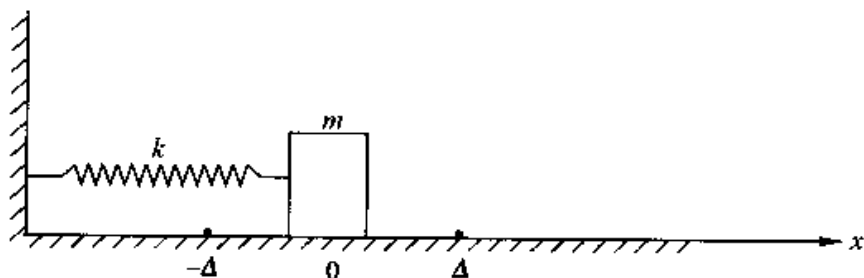


图 5.27

(1) 振动方程;

(2) 从起始位置运动到弹簧伸长 $1.2 \times 10^{-2} \text{m}$ 处所需最短时间;

(3) $t = \frac{1}{16} \text{s}$, 滑块的位移、速度、加速度和受到作用力.

5-15 质量为 M 的圆盘挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下, 并处于静止状态如图 5.28 所示, 一质量为 m 的物体, 从距圆盘为 h 的高度自由下落, 并粘在盘上和盘一起振动. 该物体和盘相碰瞬间 $t = 0$, 而且碰撞时间很短, 取碰后系统的平衡位置为坐标原点, 竖直向下为坐标的正方向, 试求系统的振动方程.

5-16 一弹簧振子, 弹簧劲度系数为 $k = 25 \text{N/m}$, 当物体以初动能 0.2J 和初势能 0.16J 振动时, 试问:

(1) 振幅是多大?

(2) 位移是多大时, 势能和动能相等?

(3) 位移是振幅的一半时, 势能多大?

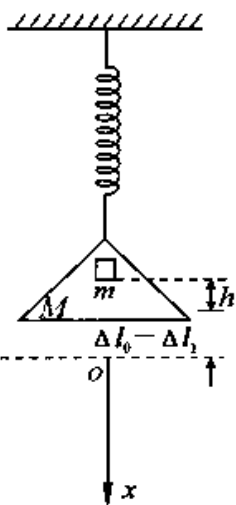


图 5.28

第 6 章 机械波

在上一章讨论振动的基础上,本章将进一步讨论一定的振动在空间的传播过程——波动,简称波.机械振动在弹性介质中的传播称为机械波,例如弦线上的波,空气中的声波,水面波,地震波等.波动是一种常见的物质运动形式.波动并不限于机械波,无线电波、光波、 x 射线也是一种波动,它是变化的电场和变化的磁场在空间的传播形式,通称电磁波.虽然各类波的本质是不同的,各有其特殊的性质和规律,可是在形式上它们也有共同的特征和规律,既都具有一定的传播速度,且都伴随着能量的传播,都能产生反射、折射、干涉和衍射等现象,而且有相似的数学表达形式.本章主要讨论机械波的基本规律,其中有许多对电磁波也是适用的.近代物理研究发现微观粒子具有明显的二象性——粒子性和波动性.因此研究微观粒子的运动规律时,波动概念也是重要的基础.

§ 6.1 机械波的产生和传播

一、机械波的形成

机械振动在弹性介质(固体、液体和气体及等离子体)中传播就形成了机械波,这是因为弹性介质内各质元之间有弹性力相互作用.所谓弹性介质就是无限多个质元相互之间通过弹性恢复力联系在一起的连续介质,它可以是固体、液体或气体.当弹性介质中任一质元因受外界的扰动而离开平衡位置时,它就发生了形变,于是一方面邻近质元对它作用一个弹性恢复力,并使它在平衡位置附近振动,另一方面根据牛顿第二定律,这个质元也给邻近质元一个弹性恢复力作用,使其也在自身平衡位置附近振动起来.这样,当弹性介质中一个质元发生振动时,由于质元之间的相互作用,邻近质元会带动它的邻近质元的振动,这样依次带动,使振动以一定速度在弹性介质中由近及远地传播出去,就形成了机械波.要形成机械波,必须具备二个基本条件,一是有形成机械振动的“物体”,即波源;二是有能够传播机械振动的弹性介质.

由于机械波是由介质中的扰动源(例如一个振动物体)所产生的,它通过介质中的粒子的来回振动而传播,因而我们可以看见或感知这种波,例如水波、空气或其它介质中的声波、弹簧上、紧张弦线上的波(如在弦乐其中的情形)等等。

必须清楚的是,波动只是振动状态在介质中的传播,在传播过程中,介质中的各质元并不随波前进,而只在各自的平衡位置附近振动.由于质元的振动状态常用相位来描述,所以振动状态的传播也可用相位的传播来描述.

二、横波与纵波

机械波分两类.一类是横波,介质中各质点的振动方向与波的传播方向垂直.另一类是纵波,介质中各质点的振动方向与波的传播方向相平行.

下面用图示方法描述波,一种是横波位移——距离图,它把波的传播介质中所有振动质元在某一时刻的位移量 y ,表示为各质元与振源的距离 x 的函数,图 6.1(a) 中的黑点,表明了某一时刻全部质元的位置,相应的位移——距离图则由图 6.1(b) 给出.

用横波的位置——距离图也能描述纵波.但对于纵波位移是沿波的传播方向的,因此在波动中 y 和 x 的方向相同,但我们在位移——距离图中仍然把它们表示为垂直,如图 6.1(b) 所示.我们也可以用类似的方法来描述质元的纵向位移,如图 6.1(c) 所示.质元密度大的区域称为密部,质元密度小的区域称为疏部.当介质质元在其平衡位置附近来回振动时,密部和疏部将沿波的传播方向移动.

图示法的第二种类型是位移——时间图.它也可以表示离振源一定距离的某点处质元的位移(或是数值)随时间的变化.对于谐振动的变化,图线是正弦或余弦曲线.

从以上的分析可知,无论是横波还是纵波,它们都只是振动状态的传播,弹性介质中的质元仅在它们的平衡位置附近振动,并没有随振动的传播而流走.

在弹性介质中形成横波时,必是一层介质相对于另一层介质发生的横向位移,即发生切变.由于固体会发生切变,因此横波能在固体中传播.而在弹性介质中形成纵波时,介质要发生压缩或后拉伸,即发生体变(也称容变),固体、液体和气体都会产生体变,因此,纵波可以在固体、体和气体中传播.顺便指出,水面波的形成是比较复杂的,不能简单地归入基本横波或纵波.然而,任何复杂形式的波动,都可以看成是横波和纵波的叠加,水表面质点既受弹性力又受准弹性力的作用,但它仍是在

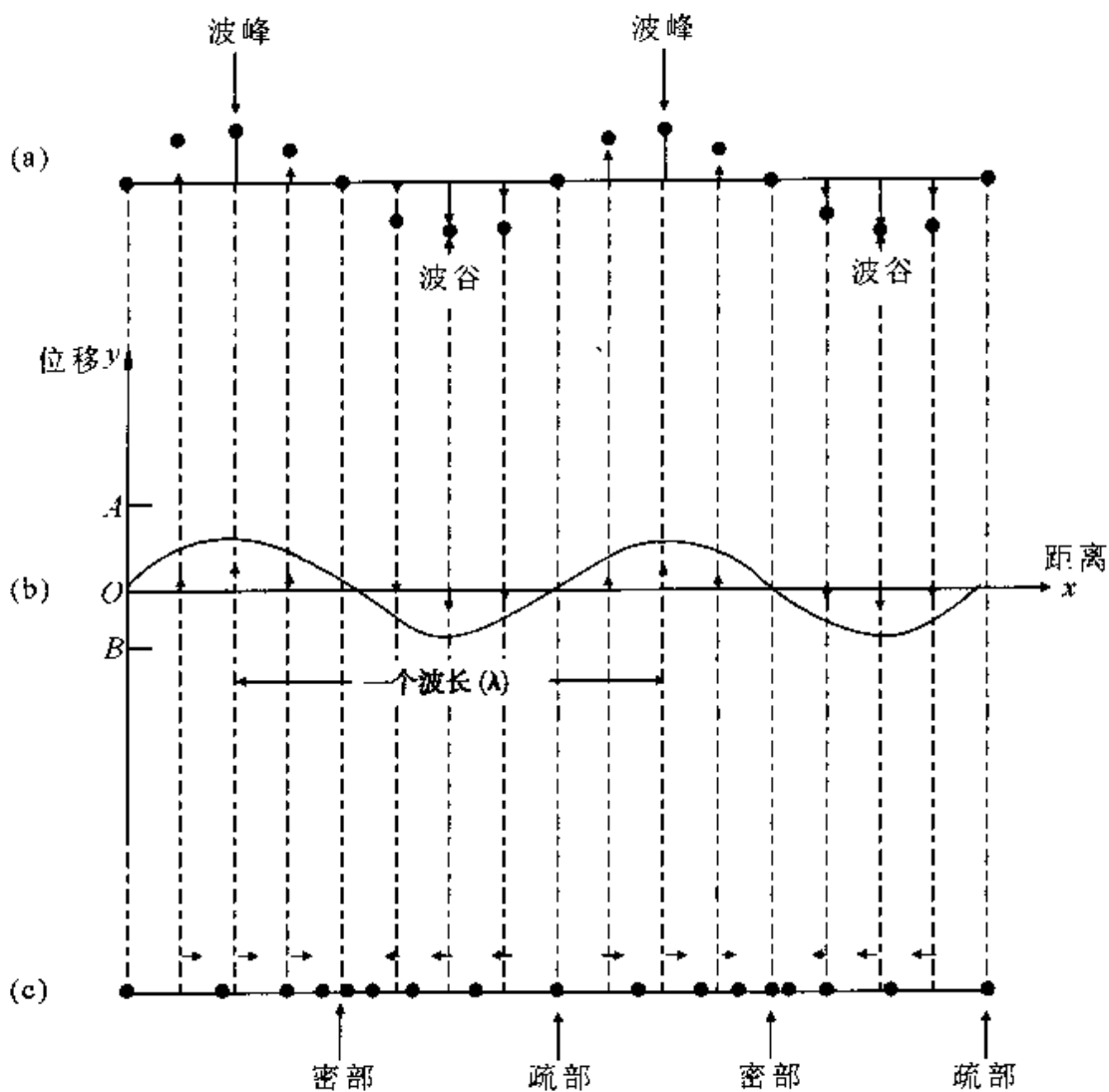


图 6.1

平衡位置附近作某种形式的振动,而这种振动也是一定速度传播开去形成波动的.

三、描述波动的物理量

为了方便的描述波,我们引入波长、周期、频率、波速几个重要的物理量.

波长指在波的传播方向上,相邻两同相位点之间的距离,对横波来讲指的是相邻两波峰或两波谷之间的距离;对纵波而言指的是相邻两疏部或两密部之间的距离.通常用 λ 表示,波源每完成一个完整的振动,便产生一个波,扰动也就散布到与波源相距 λ 的距离上.

波的周期是指波前进一个波长的距离所需要的时间,用 T 表示.周期的倒数叫

波的频率,用 ν 表示,即 $\nu = \frac{1}{T}$.如果波源每秒发生 ν 次变化,则机械波传播介质中质元的振动也会发生同样的变化.这就是说,波的频率等于波源的频率.

在波动过程中,某一振动状态(即振动相位)在单位时间内所传播的距离叫波速,用 u 表示,也称相速.若波源以不变的频率连续的振动,每秒将产生 ν 个波,而波则每秒前进一段路程 $\nu\lambda$.因此,波速 u 可表示为

$$u = \nu\lambda \quad (6-1)$$

或

$$u = \frac{\lambda}{T} \quad (6-2)$$

上两式具有普遍意义,适合于所有波动.必须清楚,波速与介质有关,它是由介质决定.而波的频率是由波源决定的,与介质无关.

理论和实验都证明,固体内横波和纵波的传播速度 u 分别为

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (\text{横波})$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{纵波})$$

式中的 G, E 和 ρ 分别为固体的切变模量、弹性模量和密度.在液体和气体中,纵波的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (\text{纵波})$$

式中的 K 为体积模量.

拉紧的绳子或弦线中横波的速度为

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\text{横波})$$

式中 T 为绳子或弦线中的张力, μ 为其线密度.

四、波线 波面 波前

波源在弹性介质中振动时,振动将向各个方向传播,形成波动.为了便于定量地讨论波的传播情况,我们引入波线、波面和波前的概念.在介质中形成波时,各质元间的相位关系和传播方向可以用几何图形形象地加以描述.波的传播方向用有向直线(或曲线)表示,叫做波线或波射线,介质中振动相位相同的各点组成的面叫波面,把某一时刻处在最前面的波面,叫波前.波线和波面始终垂直.波面的形状是平面的

叫平面波,波面的形状是球面的叫球面波,如图 6.2(a)、(b) 所示,还有波面形状是柱面的柱面波等.当球面波离波源足够远时,其局部可以近似看作是平面波.下面我们主要研究平面波的特征.

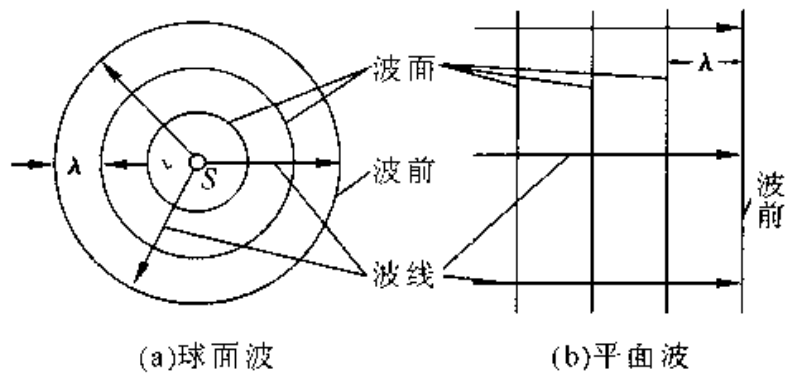


图 6.2 波线、波面与波前

§ 6.2 平面简谐波的波函数

一、平面简谐波的波函数

波源在弹性介质中的振动,把波源的振动依次向周围传播形成波.把介质中各质元位移随时间与空间的变化规律用数学形式表示出来,就是波函数.如果波沿 x 方向传播,那么,要描述它,就应该知道 r 处的质元在任意时刻 t 的位移 y ,即波函数 $y(t, x)$.

简谐振动在介质中的传播形成简谐波.如果波振面是平面,则这样的简谐波称为平面简谐波.理论分析表明,严格的简谐波只是一种理想化的模型.它不仅具有单一的频率和振幅,而且必须在空间和时间上都是无限延展的.所以严格地讲简谐波是无法实现的,对于任何作简谐振动的波源在均匀无吸收的介质中形成的波,只可近似的看成简谐波.但是可以证明,任何复杂的非简谐波,都可以看成是由若干个频率不同的简谐波叠加而成的.因而,简谐波是一种最简单的最基本的波,研究简谐波的波动规律是研究更复杂波的基础具有特别重要的意义.

由前面的定性分析知道波的传播是振动的传播也是相位传播,因此可以从时间或相位两个方面来写波函数.设平衡位置在原点的质元的位移 y_0 与时间 t 的关系为

$$y_0 = (t, 0) = f(t) \quad (6-3)$$

$f(t)$ 是时间的已知函数. 平衡位置在 x 处的质元也将做同样的振动, 但因原点的振动状态传到 x 处要经过 $\frac{x}{u}$ 的时间, 所以平衡位置在 x 处的质元在 t 时刻的位移等于

平衡位置在 $x=0$ 处的质元在 $(t - \frac{x}{u})$ 时刻的位移, 即

$$y(t, x) = y_0(t - \frac{x}{u}, 0) = f(t - \frac{x}{u}) \quad (6-4)$$

如果波是沿 x 轴反方向传播的, 由于平衡位置在 x 处的质元其振动状态传到原点要经过 $\frac{x}{u}$ 时间, 所以它在 t 时刻的位移就和平衡位置在原点的质元在 $(t + \frac{x}{u})$ 的时刻的位移相同, 即

$$y(t, x) = y_0(t + \frac{x}{u}, 0) = f(t + \frac{x}{u}) \quad (6-5)$$

这是沿 x 轴反向传播的波函数.

对于平衡位置在原点的质元作简谐振动, 其振动方程为

$$y_0(t, 0) = f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

在均匀的、不吸收能量的无限大介质中传播, 要描述一系列平面简谐波, 只须解决任一波线上波的传播过程即可. 如果波是沿 x 轴正方向以波速 u 传播的, 则波函数为

$$y(t, x) = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi] \quad (6-6a)$$

如果波是沿 x 轴反方向以波速 u 传播的, 则波函数为

$$y(t, x) = A \cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \phi] \quad (6-7a)$$

上面是用时间写的波函数, 自己不妨试一试相位的滞后或超前来写.

如果已知波长 λ , 则波函数可以改为

$$y(t, x) = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \phi] \quad (6-6b)$$

或

$$y(t, x) = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \phi] \quad (6-7b)$$

对于简谐波通常还用波数来描述, 其定义为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

即等于在 2π 的长度内波形曲线含有的“完整波”的数目。

因此波函数还可以写成

$$y = (t, x) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

或

$$y = (t, x) = A \cos(\omega t + kx + \phi)$$

有时为了分析和运算的方便,常常将简谐波的波函数表示成复数形式

$$y(t, x) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad (6-8)$$

该式的实部正好是初相位为零的情况。即

$$y(t, x) = A \cos(\omega t - kx)$$

从而不难将以上的讨论推广到一般的情形,如波沿 x 轴正方向传播且已知某点 M 距 O 点距离为 x_0 ,其振动方程为

$$y = A \cos(\omega t + \phi)$$

则相应的波函数为

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x - x_0}{u}\right) + \phi\right]$$

二、波函数的物理意义

现以波函数 $y(t, x) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$ 来具体讨论波函数的物理意义。

(1) 当 x 一定时,如 $x = x_0$,为波线上一给定的点,此时位移 y 仅仅是时间 t 的函数,即 $y(x, t) = y(x = x_0, t)$,此式为波线上给定的 x_0 处的振动方程。如图 6.3 所示。

(2) 当 t 一定时,如 $t = t_0$ (即某瞬时),波线上所有质点的位移 y 仅仅是 x 的函数,即 $y(x, t) = y(x, t = t_0)$,此式表示给定时刻($t = t_0$)所有质点的位移分布情况。以 y 为纵坐标, x 为横坐标,可得如图 6.4 所示的不同时刻的 $y-x$ 曲线,该曲线也叫波形图。从波形图可以看出,经过一个周期的时间,波向前传播了一个波长的距离。

(3) 当 x 和 t 都变化时,波函数表示了所有质点位移随时间的整体情况。图 6.5 分别画出了 t 时刻和 $t + \Delta t$ 时刻的两个波形图,从而描绘出波动在 Δt 时间传到 $x + \Delta x$ 处了。于是按给定的波函数便有

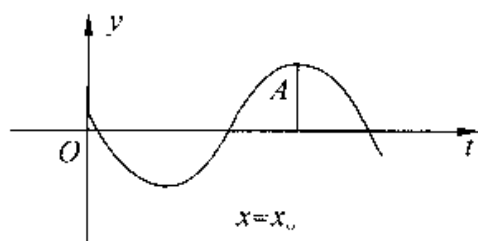


图 6.3 x_0 处的振动曲线

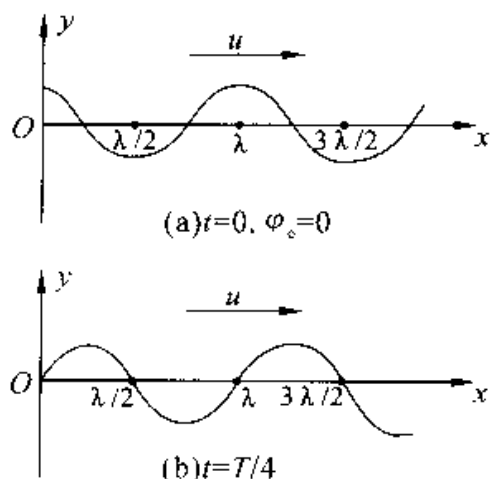


图 6.4 不同时刻波线上各质点的位移分布 波形

$$\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(ut - x) = \frac{2\pi}{\lambda}[u(t + \Delta t) - (x + \Delta x)]$$

式中 u 为波速, 由此式可得

$$\Delta x = u\Delta t$$

从以上的讨论我们现在应该清楚波的传播就是相位的传播, 也是振动这种运动形式的传播, 或者说是整个波形的传播, 波速 u 就是相位或波形向前传播的速度. 总而言之, 当 x 和 t 都变化时, 波函数就描述了波的传播过程, 所以这种波也称为行波, 或前进波.

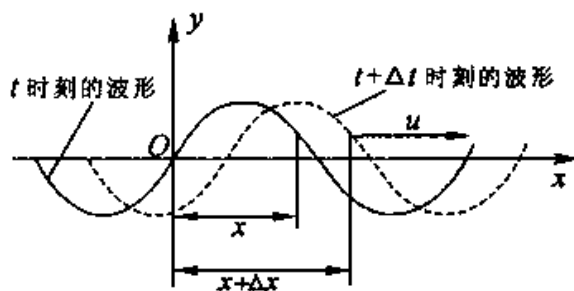


图 6.5 波形的传播

例 6-1 有一平面简谐波, 其波函数为 $y = 0.02\cos(10t + 6x)$ (SI), 试求:

- (1) 周期、频率、波长与波速;
- (2) 波谷经过原点的时刻;
- (3) $t = 6\text{s}$ 时, 各波峰的位置.

解 (1) 由已知波函数可知, 此列波是沿 x 轴负方向传播的, 可将该波函数写成标准形式 $y = 0.02\cos 2\pi(\frac{1}{\pi/5} + \frac{x}{\pi/3})$

由此可知, 振幅 $A = 0.02\text{m}$, 周期 $T = \frac{\pi}{5} = 0.63\text{s}$, 频率 $\nu = \frac{1}{T} = 1.6\text{Hz}$, 波长 $\lambda = \frac{\pi}{3} = 1.05\text{m}$, 波速 $u = \frac{\lambda}{T} = 1.67\text{m/s}$.

(2) 因原点处 $0(x = 0)$ 质点的振动方程为

$$y = 0.02\cos 10t$$

当波谷经过原点时, 质点 0 位移最小, $y = -0.02\text{m}$, 此刻质点 0 的相位应为 $10t = (2k + 1)\pi, (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$

则得波谷经过 0 点的时刻

$$t = \frac{1}{10}(2k + 1)\pi(\text{s})$$

将 $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 代入, 得 t 分别为 $0.31\text{s}, 0.94\text{s}, 1.57\text{s}, 2.20\text{s}, \dots$

(3) $t = 6\text{s}$ 时, 各质点离开平衡位置的位移坐标 x 的分布为

$$y = 0.02\cos(60 + 6x)$$

波峰的位置处应满足 $60 + 6x = 2k\pi, x = 10 - k\pi/3$, 将 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 代入得波峰位置为 $x = -10\text{m}, -8.95\text{m}, 7.90\text{m}, \dots$

例 6-2 有一平面简谐波沿 x 轴正方向传播, 已知振幅 $A = 1.0\text{m}$, 周期 $T = 2.0\text{s}$, 波长 $\lambda = 2.0\text{m}$. 在 $t = 0$ 时, 坐标原点处的质点位于平衡位置沿 y 轴的正方向运动. 求:

(1) 波函数;

(2) $t = 1.0\text{s}$ 时各质点的位移分布, 并画出该时刻的波形图;

(3) $x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动规律, 并画出该质点的位移与时间的关系曲线.

解 (1) 由题给条件取波动方程为如下形式

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \phi]$$

式中 ϕ 为坐标原点振动的初相. 根据题意由旋转矢量可得

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

代入题给数据得波函数

$$y = 1.0 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{2.0} - \frac{x}{2.0} \right) - \frac{\pi}{2} \right] (\text{SI}) \quad (1)$$

(2) 将 $t = 1.0\text{s}$ 代入式(1), 得此时刻各质点的位移分布为

$$\begin{aligned} y &= 1.0 \cos \left[2\pi \left(\frac{1.0}{2.0} - \frac{x}{2.0} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= 1.0 \cos \left[\frac{\pi}{2} - \pi x \right] \\ &= 1.0 \sin \pi x (\text{SI}) \end{aligned} \quad (2)$$

按照式(2), 可画出此时的波形图, 如图 6.6 所示.

(4) 将 $x = 0.5\text{m}$ 代入(1), 得该处质点的振动规律为

$$\begin{aligned} y &= 1.0 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{2.0} - \frac{0.5}{2.0} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= 1.0 \cos(\pi t - \pi) (\text{SI}) \end{aligned}$$

式中的 $-\pi$ 是该质点振动的初相位, 其振动曲线如图 6.8 所示.

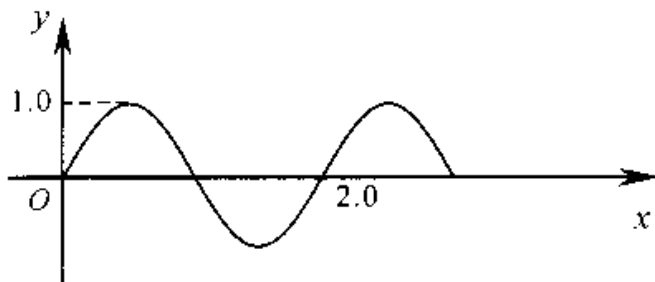


图 6.6 在 $t = 1\text{s}$ 时刻的波形图

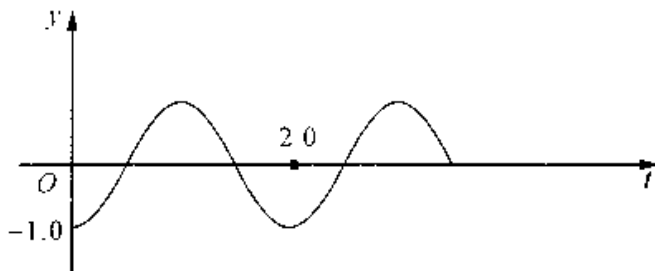


图 6.7 在 $x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动曲线

例 6-3 如图 6.7 所示, 有一平面简谐波以速度 $u = 20\text{m/s}$ 沿直线传播, 已知在传播路径上某点 M 的简谐振动方程为 $y = 3 \times 10^{-2} \cos 4\pi t (\text{SI})$.

- (1) 以 M 点为坐标原点, 写出波函数;
- (2) 以距 M 点为 5m 处的 N 点为坐标原点, 写出波函数;
- (3) 写出波的传播方向上 C 点、 D 点的简谐振动方程;
- (4) 分别写出 MC 和 CD 两点间的相位差.

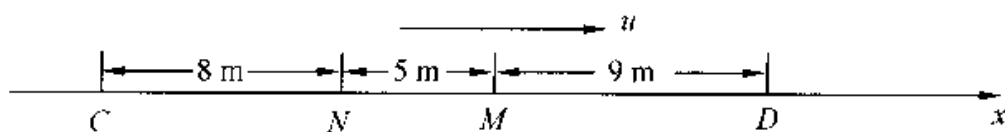


图 6.8

解 由 M 点的谐振动方程可知波的频率及波长

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 2s^{-1}, \quad \lambda = \frac{u}{\nu} = 10m,$$

(1) 以 M 点为坐标原点的波函数为

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{20}\right)\right]$$

(2) 由于波是从左向右传播, 因而 N 点比 M 点的相位超前, 故 N 点的谐振动方程为

$$y_N = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t + \frac{5}{20}\right)\right] = 3 \times 10^{-2} \cos[4\pi t + \pi]$$

故以 N 点为坐标原点的波函数为

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t - \frac{x}{20}\right) + \pi\right]$$

(3) 对(1)的情况将 C 点和 D 点的坐标分别代入该波函数就可得到相应的振动方程

$$y_C = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t - \frac{-13}{u}\right)\right] = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t + \frac{13}{20}\right)\right]$$

$$y_D = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t - \frac{9}{u}\right)\right] = 3 \times 10^{-2} \cos\left[4\pi\left(t + \frac{9}{20}\right)\right]$$

(4) 从图可知 NC 和 CD 间的距离分别为 $\Delta x_{NC} = 8m$, $\Delta x_{CD} = 22m$. 因相差一个波长的相邻两点相位为 2π , 故由 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ 可得它们的相位为 1.6π 和 4.4π .

§ 6.3 波的能量

波在弹性介质中传播时, 介质发生了形变和振动, 因而具有了弹性势能和动能, 其总能量为动能与势能之和叫波的能量. 因此振动的传播必然伴随着能量的传播, 这又是波的又一重要的特征. 波的能量是由波源的持续振动来不断提供的.

一、波的能量

我们以绳上传播的一维平面简谐波为例来说明能量传播的定量表达式. 为此先求出任一质元的动能和弹性势能.

设介质的密度为 ρ (每单位长度上的质量), 当平面简谐波

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

在绳中传播时, 任取一质元 $\Delta m = \rho \Delta x$, 其中心的位置坐标为 x , 则 t 时刻该质元的振动速度为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

质元的振动动能为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta x A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \quad (6-9)$$

波在传播过程中, 线元不仅在 y 方向有位移, 而且线元还要发生形变, 设线元由原长 Δx 伸长为 Δl , 其伸长量为 $\Delta l - \Delta x$, 如图 6.9 所示, 线元两端受到张力 T 的作用. 由于线元的变形很小, 在研究 y 方向的运动规律时, 可认为线元两端的张力大小相等, 即 $T_1 = T_2 = T$. 在线元伸长过程中, 张力 T 所做的功在量值上等于此线元的势能, 即

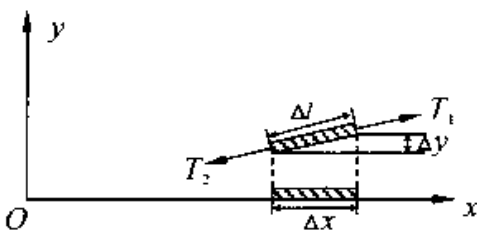


图 6.9

$$\Delta E_p = T(\Delta l - \Delta x)$$

在 Δx 很小时, 有

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \approx \Delta x \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$

利用二项式定理展开, 并略去高次项, 则有

$$\Delta l \approx \Delta x \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

因而

$$\Delta E_p = T(\Delta l - \Delta x) = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

将波函数对 x 求一阶导数

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \frac{\omega}{u} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

又利用绳中的波速公式 $u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 可得线元的势能

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x = \frac{1}{2} \rho \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \quad (6-10)$$

那么线元的机械能为

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \quad (6-11)$$

从以上的定量分析可知, 任一时刻, $\Delta E_k = \Delta E_p$, 介质中任一质元的振动动能和弹性势能随时间周期性变化的规律完全相同, 两者不但相位相同, 而且大小始终相等, 即它们同时达到最大值, 又同时达到最小值. 质元通过平衡位置时, 具有最大的振动速度, 动能最大, 同时形变最大, 因而其弹性势能也最大; 而在最大位移处其动能为零, 其形变为零, 因而弹性势能也为零. 因此对任一体积元来说, 它的机械能是不守恒的, 即沿着波动的传播方向, 该体积元不断地从后面的介质获得能量, 又不能的把能量传递给前面的介质. 这样能量就随着波动而行进, 从介质的这一部分传向另一部分. 所以, 波动是能量传播的一种形式.

然而, 在简谐振动中, 动能和势能有的相位差, 即动能达到最大时而势能为零, 势能达到最大时而动能为零, 两者相互转化, 使系统的总机械能保持守恒. 这一点是与波动有明显差别的.

为了精确地描述波能量的分布, 通常人们引入波的能量密度, 即单位体积介质中的波动能量, 用 w 表示, 由(6-11)式可得

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho \omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \quad (6-12)$$

可见能量密度随时间作周期性变化, 一个周期内能量密度的平均值叫平均能量密度, 以 \bar{w} 表示, 即

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (6-13)$$

由以上讨论可知, 波的能量、能量密度(以及平均能量密度)都与振幅平方(A^2)、角频率的平方(ω^2)及介质密度(ρ)成正比.

二、能流和能流密度

为了描述波动过程中能量的传播, 引入能流的概念. 单位时间内垂直通过某一

面积的能量,称为通过该面积的能流,用 P 表示. 如图(6.10)所示,在介质中垂直于波的传播方向取一面积 S ,则 dt 时间内通过 S 的能量应等于体积 $Sudt$ 中的能量,于是有

$$P = wus$$

很明显, P 和 w 一样,都随时间作周期性变化,取其时间的平均值,得平均能流

$$\bar{P} = \bar{w}uS \quad (6-14)$$

能流的单位为 W(瓦特),因此波的能流也称为波的功率.

垂直通过单位面积的能流,叫能流密度,用 I 表示

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{w}u = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 u \quad (6-15)$$

式(6-15)表明,能流密度越大,单位时间垂直通过单位面积的能量就越多,说明波动就越强烈. 所以能流密度 I 也称为波的强度,其单位为 $W \cdot m^{-2}$.

对平面波而言,若不考虑介质对波的吸收,根据能量守恒,由一束波线所限定的两个相同面积的波面上的平均能流密度一定相等,说明波强各处相同,波在传播过程中振幅不变,如图 6.11.

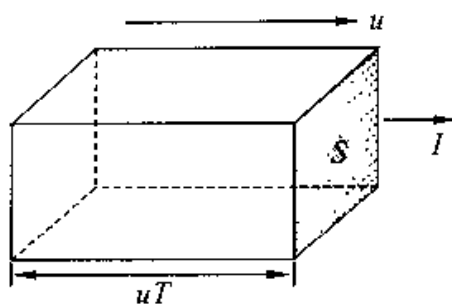


图 6.10 平均能流

在均匀、不吸收的介质中,从点波源发出的波将以相同的速度沿各方向的波线传播,即波的能量均匀的分布在球面上. 如图 6.12,考虑半径分别为 r_1 和 r_2 的两个球面,通过这两个球面的平均能流一定相等,即 $I_1 S_1 = I_2 S_2$,

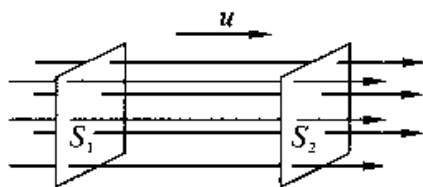


图 6.11 平面波的波强

两个球面的面积分别为 $S_1 = 4\pi r_1^2$, $S_2 = 4\pi r_2^2$,有

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

或者

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

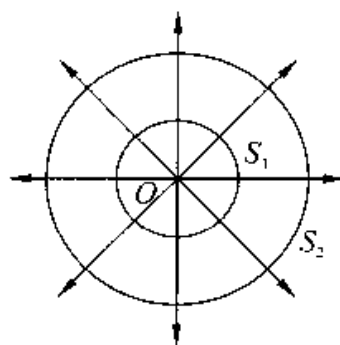


图 6.12 球面波的波强

即球面波的振幅 A 与离开波源的距离成反比. 由于波的能量来自于波源,如果知道点波源对外做功的功率 P ,那么半径为 r 的波面上的波强为

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u$$

该波面上的振幅为

$$A = \sqrt{\frac{P}{2\pi\rho\omega^2 u}} \frac{1}{r} = \frac{C}{r}$$

式中的 C 为与波源及介质有关的常数. 因振动的相位随距离的增加而落后, 所以球面简谐波的波函数为

$$y = \frac{C}{r} \cos\omega(t - \frac{r}{u})$$

三、波的吸收

波在介质中传播时, 介质总要吸收一部分能量, 因而波的强度将逐渐减弱, 这种现象称为波的吸收. 波的吸收机理十分复杂.

实验指出, 当波通过厚度为 dx 的一薄层介质时, 若波的强度增量为 dI ($dI < 0$), dI 正比于入射波的强度 I , 也正比于介质层的厚度 dx , 则

$$dI = -\alpha I dx$$

式中 α 为比例系数, 设 α 为常量, 则积分后得

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (6-16)$$

式中 I_0 和 I 分别为 $x = 0$ 及 x 处波的强度, 如图 6.13(a) 所示. α 是一个与介质的性质、温度及波的频率有关的量, 称为介质的吸收系数. 波的强度按指数规律衰减, 其曲线如图 6.13(b) 所示.

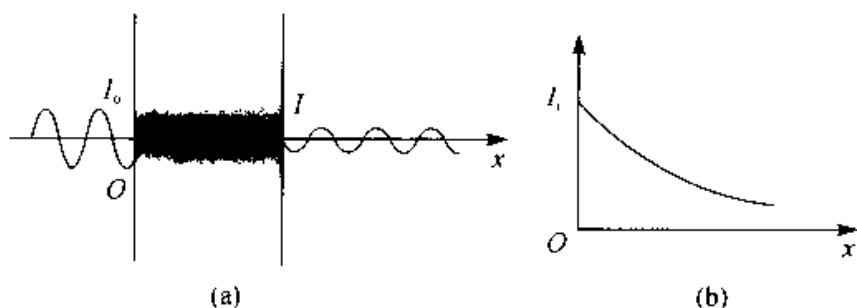


图 6.13 波的衰减

§ 6.4 惠更斯原理

一、惠更斯原理

在波动中,波源的振动是通过介质中的质元依次传播出去的,因此每个质元都可看作是新的波源。例如,在图 6.14 中,水面波传播时,遇到了障碍物,当障碍物小孔的大小与波长相比拟时,就可以看到穿过小孔的波是圆形的,与原来波的形状无关,这说明小孔可以看作是新的波源。

在总结这类现象的基础上,荷兰物理学家惠更斯于 1679 年首先提出:介质中波动传播到的各点都可以看作是发射子波的波源,而在其后的任意时刻,这些子波的包迹就是该时刻的新的波前。这就是惠更斯原理。对任何波动过程(机械波或电磁波),不论其传播波动的介质是均匀的还是非均匀的,是各向



图 6.14 小孔成为新的波源

同性的还是各向异性的,惠更斯原理都是适用的。若已知某一时刻波前的位置,就可以根据这一原理,用几何作图的方法,确定下一时刻波前的位置,从而确定波的传播方向。

下面以球面波为例,说明惠更斯原理的应用。如图 6.15(a) 所示,以 O 为中心的球面波以波速 u 在介质中传播,在时刻 t 的波前是半径为 R_1 的球面 S_1 。根据惠更斯原理, S_1 上的各点都可以看作是发射子波的波源。则以 S_1 面上的各点为中心,以 $r = u\Delta t$ 为半径沿波的传播方向作许多半球形子波,这些子波的包迹 S_2 即为 $t + \Delta t$ 时刻的新的波前。显然波面 S_2 是以 O 为中心,以 $R_2 = R_1 + u\Delta t$ 为半径的球面。若已知平面波在时刻 t 的波面 S_1 ,根据惠更斯原理,同样可以得到 $t + \Delta t$ 时刻的新的波前 S_2 ,仍然是平面,如图 6.15(b)。半径很大的球面波上的一部分波前,可以看作是平面波的波前。

二、波的衍射

波的衍射现象是指:波在传播过程中遇到障碍物时,传播方向发生改变,绕过障

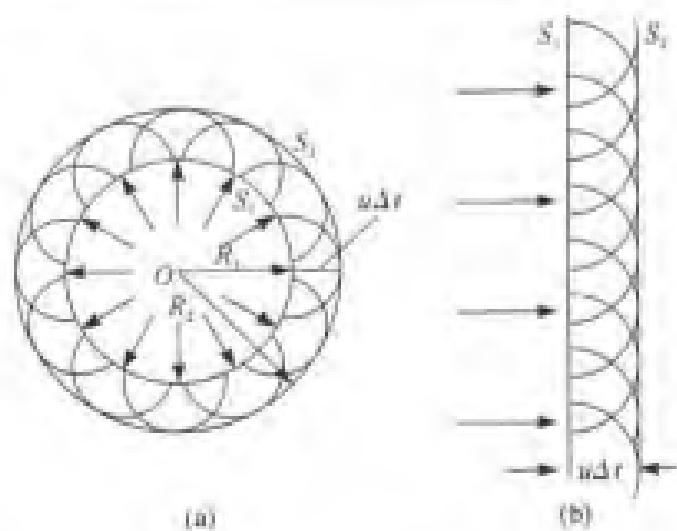


图 6.15 用惠更斯原理求波前

障碍物的边缘,在障碍物的阴影区继续传播的情况,波的衍射也叫波的绕射。

用惠更斯原理可以定性的解释波的衍射现象,如图 6.16 所示,当平面波到达一个宽度与波长相近的狭缝时,缝上的各点都看作是子波波源,作出这些子波的包迹,就得出新的波前。很明显,在缝的中部,波的传播仍然维持原来的方向,在缝的边缘处,波前发生弯曲,波的传播方向改变,波绕过障碍物的边缘继续传播,图 6.17 是水波通过狭缝时所发生的衍射现象。

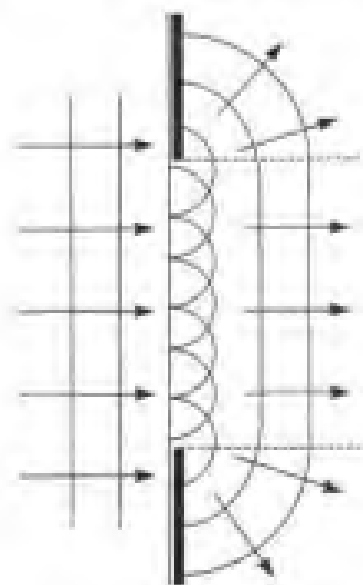


图 6.16 波的衍射

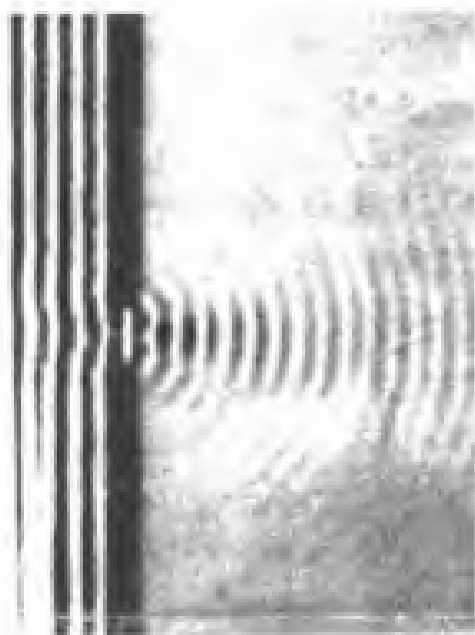


图 6.17 水波通过狭缝后的衍射现象

衍射现象显著与否,是和障碍物(缝、孔、遮板等)的大小与波长之比有关.若障碍物的限度远大于波长,衍射现象不明显;若障碍物的限度与波长差不多,衍射现象比较明显;若障碍物的限度小于波长,则衍射现象更加明显;在声学中,由于声音的波长(17mm—17m)与障碍物的大小差不多,故声波的衍射较显著,如在屋内能够听到室外的声音,就是声波能够绕过门(或窗)的缝的缘故.

只要是波就会发生衍射现象,如机械波、电磁波、射线等,衍射现象是波动的重要特征之一.后面我们要详细讨论光的衍射.

三、波的反射和折射

波的反射与折射也是波动的重要特征.当波传到两种介质的分界面时,一部分从分界面反回原介质,形成反射波;另一部分进入到另一种介质,形成折射波.

如图 6.18 所示,有一平面简谐波,其波面与纸面垂直,以入射角 i (入射波线与界面法线的夹角) 从介质 I 射向介质 II. 波在两种介质中的波速分别为 u_1 与 u_2 , 根据惠更斯原理,入射波到达分界面上的各点,都可作为子波波源. 在 t 时刻入射波的一个波前 AB , 这时 A 点刚好到达界面, 此后 AB 上各点依次到达界面, 经过时间 Δt , B 到达界面 B' . 先后到达界面的各点 (C, D, B') 将发出子波. 我们可作界面上各点子波在此时刻的包迹. 为清楚起见, 取 $AC = CD = DB'$. 由于波速不变, 所以在时刻 $t + \Delta t$, 从 A, C, D 各点发射的子波与纸面的交线, 分别是半径为 $u_1 \Delta t, 2u_1 \Delta t/3, u_1 \Delta t/3$ 的圆弧. 显然, 这些圆弧的包迹是通过 B' 的直线 $A'B'$. 作波前的垂线, 即得反射线 L . 它与界面波线的夹角 i' 称为反射角. 从图的几何关系可以看出, 入射线、反射线、界面法线都在同一平面内, 且 $i = i'$, 即入射角等于反射角, 这就是波的反射定律.

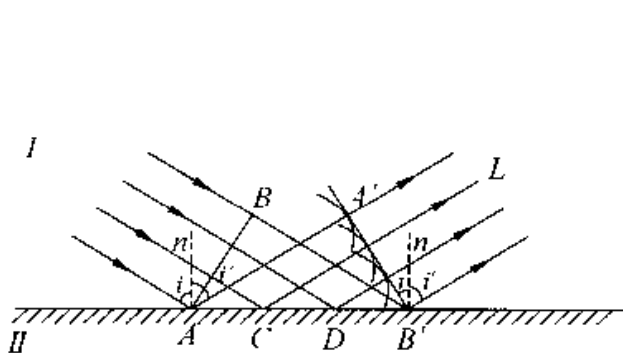


图 6.18 波的反射

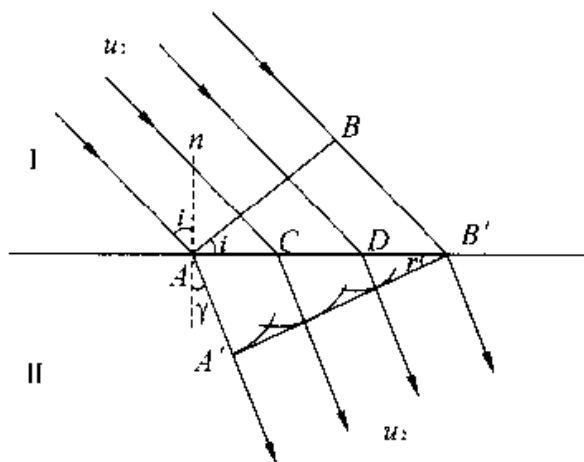


图 6.19 波的折射

再来讨论进入介质 II 的子波. 与讨论波的反射情况类似, 用作图的方法先求出折射波的波前, 从而定出折射线方向, 如图 6.19. 在同一时间 Δt 内, 波在两种介质中通过的距离分别为 $BB' = u_1 \Delta t = AB' \sin i$ 和 $AA' = u_2 \Delta t = AB' \sin \gamma$. 因此有

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

这就是折射定律. 结论与实验结果完全相同.

§ 6.5 波的干涉

让我们来讨论波的一类常见而重要的问题, 即几列波同时在介质中传播并相遇时, 介质中的质点的振动情况及波的传播规律.

一、波的叠加

经观察和实验研究总结出波的叠加原理, 其内容如下:

(1) 几列波在传播过程中在某一区域内相遇后再行分开, 仍然保持它们原有的特征(频率、波长、振幅、振动方向等)不变, 并按照原来的方向继续前进, 即各波互不干扰, 好像没有遇到其它波一样. 这称为波传播的独立性.

(2) 在相遇区域内任一点的振动, 为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和.

管弦乐队合奏或几个人同时讲话时, 空气中同时传播着许多声波, 但是人们仍然能够辨别出各种乐器的音调或各个人的声音, 这就是波的独立性的例子. 通常天空中同时有许多无线电波在传播, 人们仍能够随意接收到某一电台的广播, 这是电磁波传播的独立性.

波的叠加原理并不是普遍成立的, 只有当波的强度较小时, 描述波的过程的波动微分方程式是线性的, 叠加原理才成立. 如果波的强度较大时, 叠加原理就失效. 例如强烈的爆炸形成的声波就有明显的相互影响.

二、波的干涉

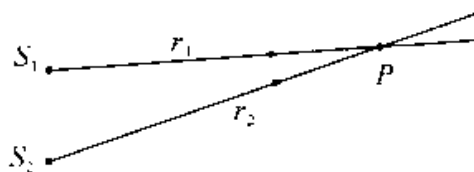
干涉现象又是波动的一个重要特征. 一般情况下, 如果各列波的振动方向、频率及相位差不相同, 则这些波在相遇区激起的介质质元的合成运动将是很复杂的. 但是当两列或两列以上的波满足频率相同、振动方向相同以及相位差恒定时, 在相遇

区域使某些地方振动始终加强,而使另一些地方振动始终减弱的现象,这种现象称为波的干涉.能够产生干涉的波叫相干波,它们的波源叫相干波源.下面根据惠更斯原理,应用同方向同频率振动合成的结论,来分析干涉现象的产生并确定干涉加强和减弱的条件.

如图 6.20 所示,设有两相干波源 S_1 、 S_2 ,它们的谐振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$



设两列波分别经过 r_1 、 r_2 的距离在 P 点相遇,两列波在点 P 引起的分振动为

$$y_{1P} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_{2P} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

P 点的合振动为

$$y = y_{1P} + y_{2P} = A \cos(\omega t + \phi)$$

式中合振动的相位满足

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

而合振动的振幅满足

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta \phi}$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= (\phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}) - (\phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) \\ &= \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} \end{aligned} \quad (6-17)$$

由于 $I \propto A^2$,合振动在 P 点的强度 I 和两相干波的强度 I_1 、 I_2 有如下关系

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \Delta \phi \quad (6-18)$$

式(6-18)表明,一般情况下 $I \neq I_1 + I_2$,还有一项 $2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \phi$,称此项为相干项,它可正可负,由 $\Delta \phi$ 确定.下面来讨论 $\Delta \phi$ 的不同取值使 I 达到最大与最小的情况.

(1) 干涉加强

$$\text{当 } \Delta\phi = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-19)$$

P 点的波强及合振幅均达到最大, $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}$, $A_{\max} = A_1 + A_2$.

(2) 干涉减弱

$$\text{当 } \Delta\phi = \pm(2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-20)$$

P 点的波强及合振幅均达到最小, $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}$, $A_{\min} = |A_1 - A_2|$.

如果两相干波源的初相相同, 即 $\phi_1 = \phi_2$, 则 $\Delta\phi$ 取决于距离差 $r_2 - r_1$, 把 $\delta = r_2 - r_1$ 称为波程差, 那么上述的干涉加强和干涉减弱条件可简化为

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm k\lambda \quad (\text{干涉加强}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-21)$$

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (\text{干涉减弱}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6-22)$$

在其它情况下, 合振幅的数值处在最大与最小之间.

从上面的讨论可知, 两相干波在空间任一点相遇时, 其干涉加强和干涉减弱的条件, 除了两波源的初相之外, 仅仅由该点到两波源的波程差来决定.

波的干涉现象可以很直观得用水面波的干涉来演示, 如图 6.21 所示, 图中亮的地方是该处质元起伏的很厉害, 说明这些地方振动加强了; 图中暗的地方只有微弱的起伏, 甚至静止不动, 说明这些地方振动减弱了, 甚至完全抵消. 图中很清楚的看出在两列波相遇的区域内振动的强弱是按一定规律分布.



图 6.21 水波的干涉现象

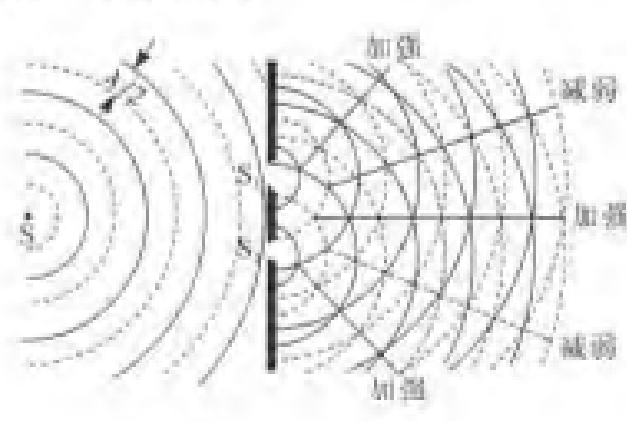


图 6.22 波的干涉

干涉现象是波动所独有的现象, 对于光学, 声学 and 许多工程学都非常重要, 并有广泛的应用. 例如在大礼堂, 影剧院等的设计必须考虑声场的分布, 以避免声场分布的不均匀, 出现有些区域声音过强, 而有些区域声音过弱.

例 6-4 如图 6.23 所示,两波源分别位于同一介质中 A 和 B 处,振动方向相同,振幅相等,频率都为 100Hz,但 B 处波源比 A 处波源位相超前 π . 若 A, B 相距 10m,波速为 400m/s,试求 A, B 连线上因干涉而静止的各点.

解 由题给条件可知 A, B 两波源为相干波源. 建立如图所示的坐标系,在 AB 之间任取一点 P,其坐标为 x ,则两波的相位差为

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi_{B0} - \phi_{A0} - \frac{2\pi}{\lambda}(\gamma_B - \gamma_A) = \pi - \frac{2\pi\gamma}{u}[(10-x) - x] \\ &= \pi x - 4\pi\end{aligned}$$

因干涉而静止不动的点满足干涉相消的条件 $\Delta\phi = \pm(2k+1)\pi$,有

$$\Delta\phi = \pi x - 4\pi = \pm(2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

按题给条件,取

$$x = 2k + 1$$

可得静止点的位置坐标为

$$x = 1, 3, 5, 7, 9\text{m}$$

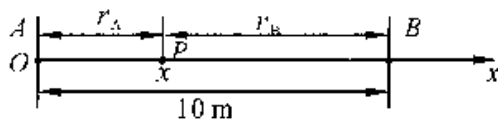


图 6.23

三、波干涉的应用 —— 噪声的控制

内燃机、通风机、鼓风机、压缩机和燃气轮机等工作时,在排放各种高速气流的过程中,都伴随有噪声. 利用干涉原理制成的干涉型消声器可以降低这种噪声.

由两相干声源 S_1 和 S_2 发出的两列相干波,分别传播了 r_1 和 r_2 后在介质中点 P 处相遇时,发生干涉现象. 若两列相干声波的振幅相同,由干涉原理知,当

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

时,合振幅 $A = 0$

即两列声波因相干而抵消.

图 6.24 是干涉型消声器的结构原理图,一列波长为 λ 的声波,沿水平管道自左向右传播. 当入射波到达 A 处时,分成两束相干波,它们分别向上和向下沿着图中箭头所示的方向传播,经过不同的距离 r_1 和 r_2 ,再在 B 处相遇,若 $\Delta r = r_2 - r_1 = (2k+1)\lambda/2$,则声波的振幅 $A \approx 0$.

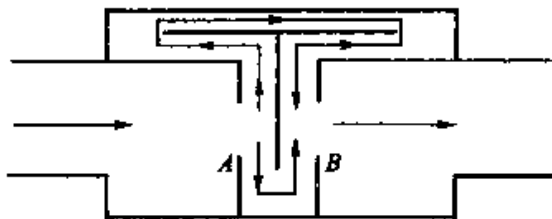


图 6.24

这就是说该频率的声波能量几乎减小为零了,这样就达到了控制噪声的目的.

应当指出,干涉型消声器能控制的噪声频率是有限的,它只能消除低频噪声.发动机的周期性排气噪声(正常工作期间),就是一种典型的低频噪声.一般说来,一台四缸四冲程发动机,当它以 2 000r/min 的转速运转时,其噪声峰值频率在 200Hz 以下的噪声较大^①.所以常用干涉型消声器来消除这类低速转动发动机所产生的低频噪声.一台带有干涉器的柴油发动机经消声处理后,其排气噪声可以降低 10dB 以上.

为了使这类消声器在低频范围内具有较宽的消声频率,往往将不同结构的消声单元串接起来,并使每一单元的 Δr 不等,就可以对不同波长的噪声加以控制.例如,在摩托车的排气系统中,常安装如图 6.25 所示的干涉型消声器.

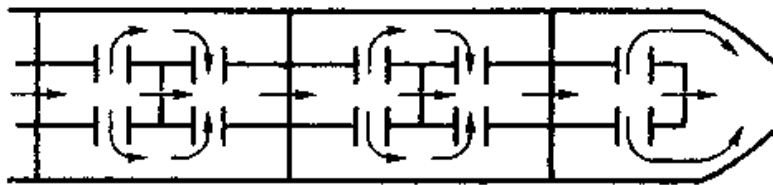


图 6.25

§ 6.6 驻波

一、驻波的产生

驻波是干涉的一种特殊情况.图 6.26 是用弦线作驻波实验的示意图.弦线的一端系在音叉上,另一端系着砝码使弦线拉紧.当音叉振动时,调节劈尖至适当的位置

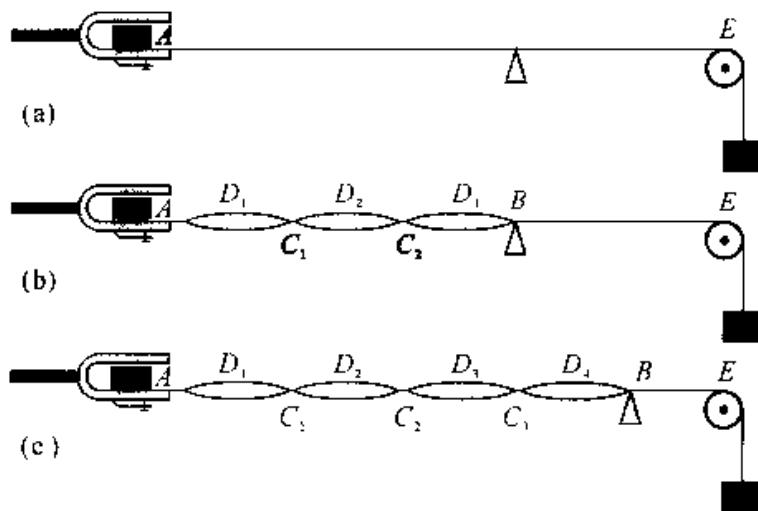


图 6.26 弦线驻波

置,可以看到弦线被分成几段长度相等的作稳定振动的部分,即在整个弦线上,并没有波形的传播.线上各点的振幅不同,有些点始终静止不动,即振幅为零,而另一些点则振动最强,即振幅最大.这就是驻波.

如图 6.27 所示,虚线与细实线分别表示沿 x 轴正、负方向传播的简谐波,粗实线表示两波叠加的结果.设 $t = 0$ 时,入射波和反射波的波形刚好重合,其合成波形为两波形在各点相加所得,表明各点振动加强了[图 6.27(a)].在 $t = T/8$ 时,两波分别向右左传播了 $\lambda/8$ 的距离,其合成波形仍为一余弦曲线[图 6.27(b)].在 $t = T/4$ 时,两波分别向右左传播了 $\lambda/4$ 的距离,合成波形为一合振幅为零的直线[6.27(c)].在 $t = 3T/8$ 和 $t = T/2$ 时,其合成波形在各点的位移分别与 $t/T/8$ 和 $t = 0$ 时的合位移大小相等,但方向相反[6.27(d)、(e)].

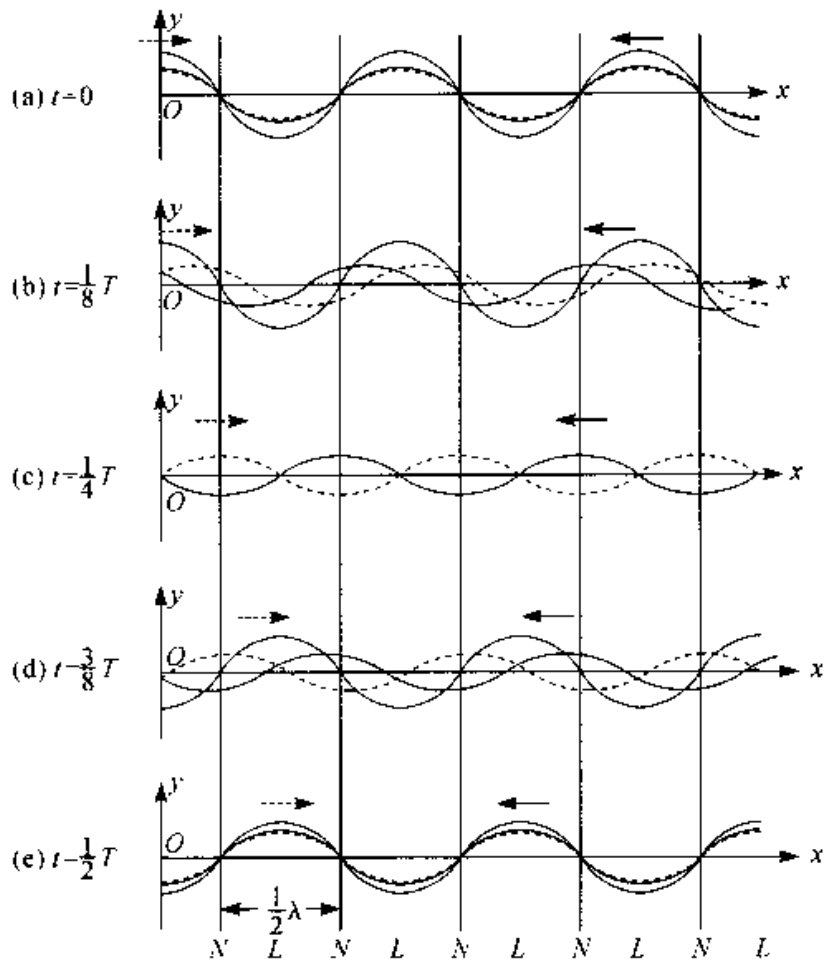


图 6.27 驻波

二、驻波方程

设有两列波振动方向相同、振幅相同、频率相同、初相位均为零且分别沿 x 轴

正、负方向传播的简谐波的波动方程为

$$y_1 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$$

其叠加波的波函数

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t \end{aligned} \quad (6-23)$$

这就是驻波的波函数,也称为驻波方程.式中 $\cos 2\pi \nu t$ 表示简谐振动,而 $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 是各点的振幅,它只与 x 有关,即各点的振幅随着其与原点的距离的不同而异.上式表明,当形成驻波时,弦线上的各点作幅为 $|2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}|$, 频率为 ν 的简谐振动.但是要注意,这一函数不满足 $y(t + \Delta t, x + u\Delta t) = y(x, t)$, 因此它不表示行波,只说明各点在作简谐运动.

(1) 波腹和波节

因弦线上各点作振幅为 $|2\pi \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}|$ 的简谐振动,所以凡满足 $|\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}| = 1$ 的那些点,它们的振幅最大,等于 $2A$, 这些点振动最强,叫波腹;而满足 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$ 的那些点,振幅均为零,这些点始终静止不动,叫波节.弦线上其余各点的振幅介于零与最大值之间.波腹的位置

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi$$

$$x = k \frac{\lambda}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

波节的位置

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

相邻两波腹或波节之间的距离

$$x_{n+1} - x_n = (n+1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

即相邻两波腹或两波节之间的距离均为半个波长. 这一点为我们提供了一种测量行波波长的方法, 只要测出相邻两波腹或波节之间的距离就可以确定原来两行波的波长 λ .

由式(6-23)来分析, 弦线上各点的相位与 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 的正负有关, 凡是使 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 为正的各点的相位均为 $2\pi\gamma t$, 凡是使 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 为负的各点的相位均为 $2\pi\gamma t + \pi$. 在波节两侧的点, $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 的符号相反, 因此波节两侧的相位相反; 在两波节之间, $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 具有相同的符号, 各点的振动相位相同. 也就是说, 波节两侧各点同时沿相反方向达到各自位移的最大值, 又同时沿相反的方向通过平衡位置; 而两波节之间各点则沿相同方向达到各自的最大位置, 又同时沿相同的方向通过平衡位置. 由此可知, 弦线不仅作分段振动, 而且各段作为一个整体, 一齐同步振动. 在每一时刻, 驻波都有一定的波形, 但此波既不左移也不右移, 各点以确定的振幅在各自的平衡位置附近振动, 所以才称为驻波.

虽然我们仅仅讨论弦线上的驻波, 但所得到的结论是普遍的, 不仅对各种介质中的机械驻波, 而且对电磁波和光波的驻波也同样适用.

三、半波损失

在图 6.25 所示的实验中, 波在固定处反射, 并形成波节. 实验还表明, 如果波是在自由端反射的, 则反射端是波腹. 一般情况下, 在两种介质分界面处是形成波节还是波腹, 与波的种类、两种介质的性质等有关. 定量研究证实, 对机械波而言, 它由介质的密度 ρ 和波速 u 的乘积 ρu (叫波阻) 所决定. 我们将 ρu 较大的介质, 叫波密介质; ρu 较小的介质, 叫波疏介质. 波从波疏介质垂直入射到波密介质, 被返回到波疏介质时, 在反射处形成波节; 反之, 则在反射处形成波腹.

在两种介质的分界面上若形成节, 说明入射波与反射波在此处的相位时时相反, 即反射波在分界面处的相位有 π 的跃变, 相当于出现了半个波长的波程差. 这种现象称之为半波损失.

四、驻波的能量

仍然以图 6.26 所示的弦线上的驻波实验为例,来讨论驻波的能量,所得结论对其它驻波也适用.当弦线上的各点达到各自的最大位移时,振动速度都为零,因而动能都为零,但此时弦线各段都有了不同程度的变形,且越靠近波节处的形变越大,因此,这时驻波的能量具有势能的形式基本上集中于波节附近.当弦线上的各点同时回到平衡位置时,弦线的形变完全消失,势能为零,但此时各质点的振动速度达到各自的最大值,且处于波腹处质点的速度最大,所以,这时驻波的能量具有动能的形式,基本上集中于波腹附近.至于其他时刻,则动能与势能同时存在.可见,在弦线上形成驻波时,动能和势能不断的相互转换,形成了能量交替地由波腹附近转向波节附近,再由波节附近转回到波腹附近的情形,这说明驻波的能量并没有作定向的传播,换言之,驻波不传播能量.这是驻波与行波的又一重要区别.因此也可以说,驻波乃是整个物体进行的一种特殊形式的振动.

五、振动的简正模式

驻波现象有许多实际的应用.若将一根弦线的两端用一定的张力固定在相距 L 的两点之间,当拨动弦线时,弦线中就产生来回的波,它们就合成而形成驻波.但是并不是任意波长的波都能在一定线度的介质中形成驻波的.由于弦线两端固定不动,所以这两点为波节,由图 6.28 可见,此时的波长 λ 和弦线长度 L 之间应满足下列条件

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-24)$$

因而弦线上容许的波长为

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (6-25)$$

这就是说能在弦线形成驻波的波长值是不连续的,用现代物理的语言说,波长是“量子化”的.利用关系式 $\nu = \frac{u}{\lambda}$ 可知,频率也是量子化的,相应的可能频率为

$$\nu_n = n \frac{u}{2L} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6-26)$$

式中的 $u = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ 为弦线中的波速, 其中每一频率对应整个弦线的一种可能的振动方式, 而这些频率就叫弦振动的本征频率. 由式(6-26)决定的各种振动方式, 统称为弦线振动的简正模式, 其中最低频率称为基频, 其它较高频率各为基频的某一整数倍, 并常称为二次、三次、四次……谐频.

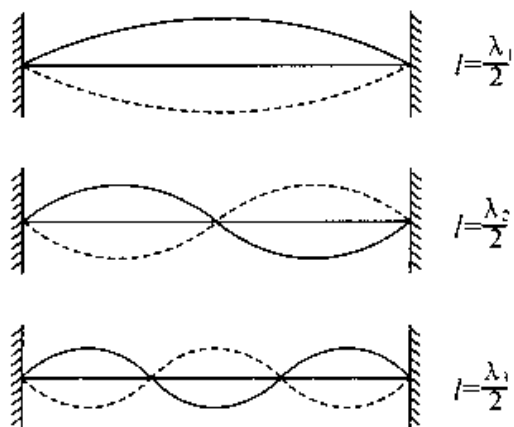


图 6.28 两端固定弦振动的简正模式

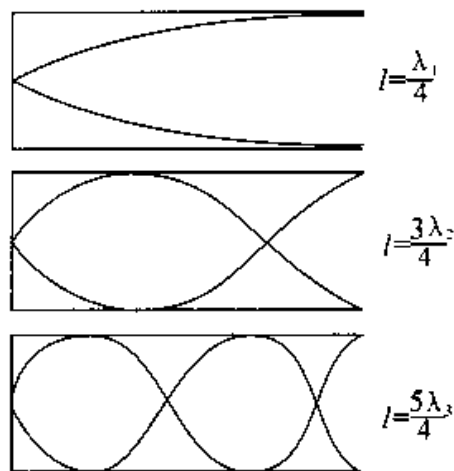


图 6.29 一端开口一端封闭的玻璃管内空气柱振动的简正模式

简正模式的频率称为系统的固有频率. 如上所述, 一个驻波系统有许多个固有频率. 这和弹簧振子只有一个固有频率不同.

当外界策动源的频率与振动系统的某个简正频率相同时, 就会激起高强度的驻波. 这种现象也叫共振或谐振. 每中乐器无论弦、管、锣和鼓实质上都是驻波系统, 它们的振动都按其各自相应的某一简正模式进行并发生共振, 从而发出具有特定音色(谐频)的音调(基频).

例 6-5 有一沿 x 轴正向传播的波函数 $y_{\lambda} = A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, 在 $x = 0$ 处发生反射, 反射点为节点. 求

- (1) 反射波的波函数;
- (2) 驻波的波函数;
- (3) 各波腹和波节的位置坐标.

解 (1) 由题给的已知条件可知, 反射点为节点, 说明波反射时有的相位突变, 所以反射波的波函数为

$$y_{\text{反}} = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \pi\right]$$

(2) 波为沿相反方向传播的相干波, 根据波的叠加原理, 驻波的波函数为

$$\begin{aligned} y &= y_{\text{入}} + y_{\text{反}} = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \pi\right] \\ &= 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \end{aligned}$$

(3) 形成波腹的各点, 振幅最大, 即

$$\left| \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1$$

所以

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{x}{\lambda} &= \pm (2k+1) \frac{\pi}{2} \\ x &= \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

因入射波是由 x 轴的负端向坐标原点传播, 所以各波腹的位置坐标为

$$\begin{aligned} k=0, x_0 &= -\frac{\lambda}{4} \\ k=1, x_1 &= -\frac{3\lambda}{4} \\ k=2, x_2 &= -\frac{5\lambda}{4} \\ &\dots \\ k=n, x_n &= -(2n+1) \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

形成波节的各点, 振幅为零, 即

$$\sin 2\pi \frac{x'}{\lambda} = 0$$

所以

$$2\pi \frac{x'}{\lambda} = \pm k\pi$$

可得

$$x' = \pm k \frac{\lambda}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

各波节的位置坐标为

$$k = 0, x'_0 = 0$$

$$k = 1, x'_1 = -\frac{\lambda}{2}$$

$$k = 2, x'_2 = -\lambda$$

...

$$k = n, x'_n = -n \frac{\lambda}{2}$$

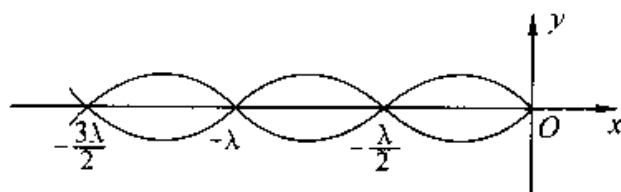


图 6.30 波腹与波节的位置坐标

§ 6.7 声 波

除偏振以外, 声波具有前面讨论波动的所有性质. 这就暗示声波是一种纵波. 此外, 声波需要传播介质而不能在真空中传播, 所以必定是属于机械波.

声波是由振动物体产生的. 振动物体把沿声波传播方向的振动叠加到传播介质粒子的任意运动上便产生了声波. 这种振动的频率即声波的频率等于振源的频率, 要使人能听到声音, 声波的频率必须在大约 20-20000Hz 的范围内. 空气中的声速约为 330m/s. 把频率低于 20Hz 的声叫次声, 频率高于 20000Hz 的声叫超声.

一、声压

介质中有声波传播的压力与无声波时的静压力之间有一差额, 这一差额叫声压. 声波是疏密波, 在密部区域中, 空气粒子密集而导致空气的密度及压强高于正常值, 且在密部中央两者均达到一个极大值. 与此相反, 疏部中央空气的密度及压强均有极小值. 因此, 在稀疏区域, 实际压力小于原来静压力, 声压为负值; 在稠密区域, 实际压力大于原来压力, 声压为正值.

应用体积弹性变形公式 $\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$, 在介质中取一小质元, 对平面简谐波而言, 体应变 $\frac{\Delta V}{V}$ 也等于 $\frac{\partial y}{\partial x}$. 以 P 表示声压, 则有

$$P = -K \frac{\partial y}{\partial x} = -K \frac{\omega}{u} \sin\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

由于纵波的波速为 $u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, 因此有

$$P = -\rho u \omega \sin\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

声压的幅值为

$$P_m = \rho u A \omega \quad (6-27)$$

二、声强

声强就是声波的强度,指平均能流密度,即

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \\ &= \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho u} \end{aligned} \quad (6-28)$$

由此可知,声强与频率的平方、振幅的平方成正比.

引起人的听觉的声波,不仅有一定的频率范围,还有一定的声强范围.能够引起人的听觉的声强范围大约为 $10^{-12} \sim 1 \text{ W/m}^2$. 频率为 1000 Hz 对应的 10^{-12} W/m^2 的声强为勉强能听到的声音,这个最低限度叫闻阈;能够在耳中引起强烈振动,有压力感甚至痛觉的声强为 10 W/m^2 ,这个限度叫痛感阈.

由于可闻声强的数量级相差太悬殊,即强弱相差 13 个数量级.所以通常用声强级来描述声波的强弱.规定 $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ 作为测定声强的标准,某一声强 I 的声强级用 L 表示,即

$$L = \lg \frac{I}{I_0} \quad (6-29)$$

声强级的单位称为贝[尔],符号为 B. 通常以分贝 (dB) 为单位, $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$, 因此以分贝为单位的声强级的表达式为

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} (\text{dB}) \quad (6-30)$$

人耳所能够忍受的声强约为 1 W/m^2 , 其声强级为 120 dB , 人耳最敏感的声波的频率范围在 $2000 \sim 3000 \text{ Hz}$, 有听觉的最小声强级约为 -5 dB .

声音响度是人耳对声音强度的主观感觉,研究表明,响度大致正比于声强,声级越大,人感觉越响.表 6-1 给出常遇的一些声音的声强、声强级和响度.

表 6-1 几种声音的声强、声强级和响度

声 源	声强 I (W/m^2)	声强 L (dB)	响 度
聚焦超声波	10^9	210	
炮声	1	120	
痛觉阈	1	120	
铆钉机	10^{-2}	100	震耳
闹市车声	10^{-5}	70	响
通常谈话	10^{-6}	60	正常
室内轻声收音机	10^{-8}	40	较轻
耳语	10^{-1}	20	轻
树叶沙沙声	10^{-11}	10	极轻
听觉	10^{-12}	0	

声波是由振动的弦线(如提琴弦线、人的声带等)、振动的空气柱(如风琴管、单簧管等)、振动的板与振动的膜(如鼓、扬声器等)等产生的机械波. 近似周期性或由少数几个近似周期的波合成的声波, 如果强度不太大时会引起愉快悦耳的乐音. 波形不是周期性的或是由个数很多的一些周期波合成的声波, 听起来是噪音.

§ 6.8 多普勒效应

前面讨论说波的频率就是波源的频率, 那么为什么在实际生活中当高速行驶的列车鸣笛迎面驶来时, 听到的声音越来越高? 当高速行驶的列车鸣笛离去时, 听到的声音越来越低? 前面所讨论的问题不包含此类问题. 也就是说, 前面讨论的是波源与观察者相对静止的问题. 本节所要讨论的多普勒效应是指当波源与观测者相对于介质有相对运动时, 观察者接收到的频率与波源发出的频率就不相同. 为讨论简单起见, 仅仅讨论波源与观察者(接收器)在一条直线上运动的情况. 还要清楚几个名词, 波源的频率、观测者接收到的频率和波的频率. 波源的频率 ν 指的是波源在单位时间内振动的次数, 或在单位时间内发出完整波得数目, 观测者接收到的频率 ν' 指的是观测者在单位时间内接收到的振动次数或完整波数; 波的频率 $\nu_b = \frac{u}{\lambda_b}$, 式中 u 为介质中的波速, λ_b 为介质中的波长. u 与波源及观测者的运动无关, v 表示波源相对于介质的速度, v_R 表示观测者相对于介质的速度.

一、波源不动,观测者相对介质运动

波源不动,观测者向着波源运动,观测者在单位时间内接收到的完整的波的数目比它静止时的多.如图 6.31 所示,波源 S 发出的波以速度 u 向着观测者传播,同时观测者以速度 v_R 向着静止的波源运动,因而多接收了一些完整的波数.那么在 dt 时间应在 $(v_R + u)dt$ 距离内的波都被观测者接收到了.所以观测者接收到的频率(完整波数)为

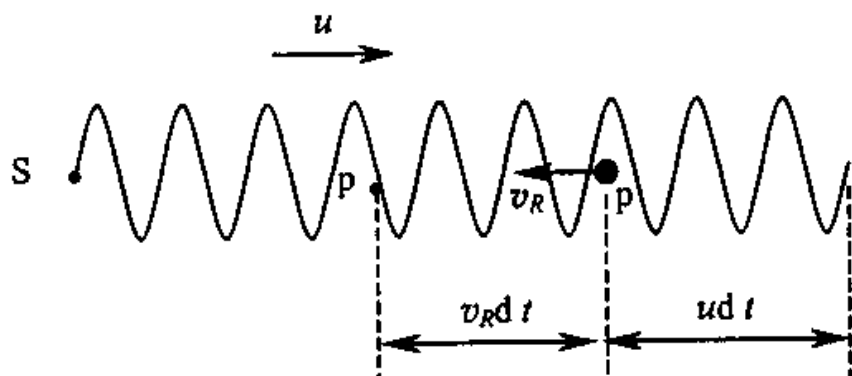


图 6.31 波源静止观察者运动时的多普勒效应

$$\nu' = \frac{v_R + u}{\lambda_b} = \frac{v_R + u}{\frac{u}{\nu_b}} = \frac{v_R + u}{u} \nu_b$$

由于波源在介质中静止,所以波的频率 ν_b 就等于波源的频率 ν ,即

$$\nu' = \frac{v_R + u}{u} \nu \quad (6-31)$$

该式说明,当观测者向着静止的波源运动时,观测者接收到的频率为波源频率的 $(1 + \frac{v_R}{u})$ 倍,即 $\nu' > \nu$

当观察者远离波源运动时,通过关似的分析,可求得观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u - v_R}{u} \nu \quad (6-32)$$

这时接收到的频率小于波源的频率,即 $\nu' < \nu$.

二、观测者不动,波源相对介质运动

当波源运动时,介质中的波长将发生变化.波源运动时,波源在某瞬时在某点 S 发

出的波经过一个周期 T 时间后到达距离 uT 的点 P ，而波源在此时间内到达点 S' ，如图 6.31 所示，此时才发出与该振动状态相位差 2π 的下一个振动状态， P 点和 S' 点的振动状态完全相同，设波源以速度 v_s 向着观察者运动，此时介质中的波长为

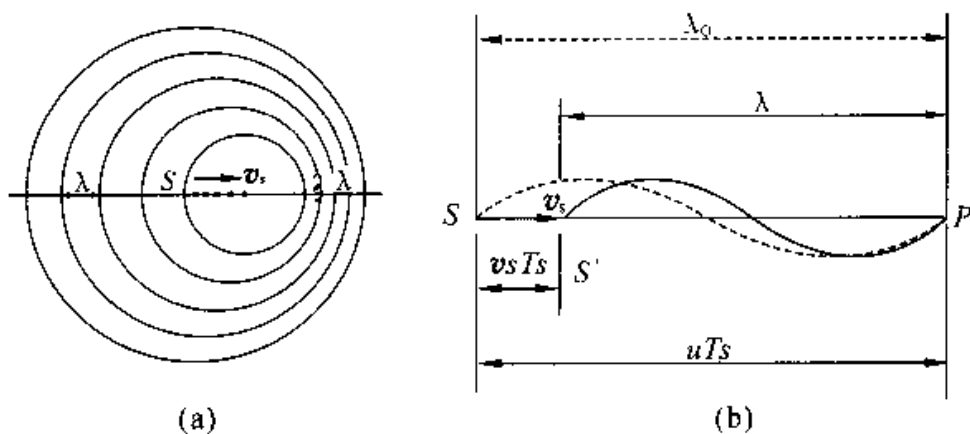


图 6.32 波源运动时的多普勒效应

$$\lambda_b = \lambda - v_s T = (u - v_s) T = \frac{u - v_s}{\nu}$$

相应的频率为

$$\nu_b = \frac{u}{\lambda_b} = \frac{u}{u - v_s} \nu$$

由于观察者静止，所以他接收到的频率就是波的频率，即 $\nu' = \nu_b$ ，因此观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{u - v_s} \nu \quad (6-33)$$

此式说明观得接收到的频率大于波源的频率，即 $\nu' > \nu$ 。

当波源远离观察者运动时，通过类似的分析，可求得观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{u + v_s} \nu \quad (6-34)$$

三、波源与观察者同时相对介质运动

综合以上两种情况，可得当波源和观察者相向运动时，观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u + v_R}{u - v_s} \nu \quad (6-35)$$

当波源与观察者彼此离开时，观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u - v_R}{u + v_s} \nu \quad (6-36)$$

从以上的分析可知,不论是波源运动,还是观察者运动,或者两者都运动,定性地讲,只要两者互相接近,接收到的频率就高于原来波源的频率;两者互相远离,接收到的频率就低与原来波源的频率.

如果波源和观察者不是沿二者连线方向(即纵向)运动,上面几个公式仍然适用,只是将式中的 v_R 和 v_s 理解为观察者速度和波源速度的纵向分量,即声波(机械波)只有纵向多普勒效应,声波无横向多普勒效应.

这里需要注意的是,无线电波和光波同样存在多普勒效应,但电磁波的速率恒定为 c ,与波源和观察者是否运动无关,电磁波的传播不需要介质,因而就不存在波源和观察者相对于介质运动的速度的问题,只有波源和观察者的相对运动才需要考虑.但要用相对论处理.然而波源与观察者互相接近时,频率变大;互相远离,频率变小的结论是相同的.

多普勒效应有许多实际应用,例如交通警察利用多普勒效应检测车速,在医学上,用多普勒效应测量人体的血流速度,在工业上则用来测定管道中污水或有悬浮物液体的流速等.

例 6-6 有一振动频率为 1000Hz 声源.(1)当它以 20m/s 的速率向静止的观察者运动时,求此观察者接收到的声波的频率;(2)如果声源静止,而观察者以 20m/s 的速度向声源运动时,求观察者接收到的声波的频率.设空气中的声速为 340m/s .

解 (1)由题知波源运动 $v_s = 20\text{m/s}$ 而观察者静止 $v_R = 0$,根据多普勒效应的公式 $\nu' = \frac{u + v_R}{u - v_s} \nu$ 可得

$$\nu'_1 = \frac{u + v_R}{u - v_s} \nu = \frac{340 + 0}{340 - 20} \times 1000 = 1063\text{Hz}$$

(2)对波源静止 $v_s = 0$ 而观察者运动 $v_R = 20\text{m/s}$,按多普勒效应可得观察者接收到的频率为

$$\nu'_2 = \frac{u + v_R}{u - v_s} \nu = \frac{340 + 20}{340 - 0} \times 1000 = 1059\text{Hz}$$

例 6-7 利用多普勒效应监测汽车行驶的速度.一固定波源发出频率为 100kHz 的超声波,当汽车迎着波源驶来时,与波源安装在一起的接收器接收到从汽

车反射回来的超声波的频率为 110KHz ，已知空气中声速为 340m/s ，求汽车行驶的速度。

解 分两步来解决此问题。第一步，波源静止不动，波向着车传播并被汽车接收，汽车作为观察者迎着波源运动，设汽车行驶速度为 v ，则汽车接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u+v}{u}$$

第二步，波从汽车反射回来，此时汽车作为波源向着接收器运动，汽车发出的波的频率即是它接收到的频率 ν' ，而接收器是观察者，它接收到的频率为

$$\nu'' = \frac{u}{u-v}\nu'$$

联立两式可求得汽车行驶速度为

$$v = \frac{\nu'' - \nu}{\nu'' + \nu}u = \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 340 = 16.2\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 58.3\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

四、冲击波

在前面讨论的问题中，所涉及的问题都是波源的运动速度比波的传播速度小的情况。如果波源向着观察者运动的速度超过波的速度，那么式(6-33)将失去意义。实际上，在这种情况下，急速运动着的波源的前方不可能有任何波产生，所有的波前将被挤压而聚集在

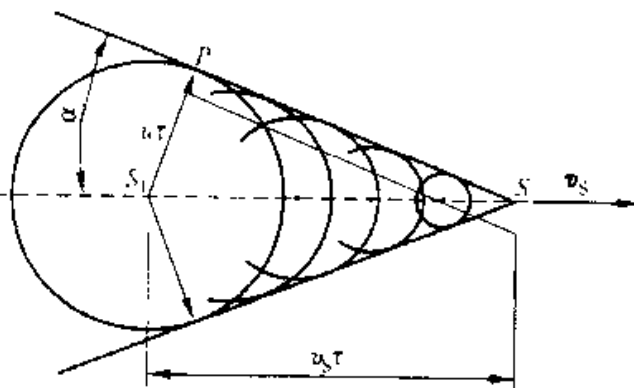


图 6.33 冲击波的产生

一圆锥面上，如图 6.33 所示，在这个圆锥面上，波的能量高度集中，容易造成巨大的破坏，这种波称为冲击波或激波。在飞机、炮弹等以超音速飞行时，或火药爆炸、核爆炸时，都会在空气中激起冲击波。冲击波到达的地方，空气压强突然增大，足以损伤耳膜和内脏，打碎窗玻璃，甚至摧毁建筑物，这种现象称为声爆或声振。

当波源经过位置 S_1 时发出的波在其后 t 时刻的波阵面为半径等于 ut 的球面，但此时刻波源已前进了 $v_s t$ 的距离到达位置 S 。在整个时间 t 内，波源发出的波到达的前沿形成一个圆锥面，这个圆锥面叫马赫锥，其顶角 α 由下式决定

$$\sin\alpha = \frac{u}{v_s}$$

类似的现象在水面上也能看到. 当船速超过水面上水波的波速时, 在船后就激起以船为顶端的形波, 这种波称为舷波(或船波), 如图 6.34 所示.

当带电粒子在介质中运动, 其速度超过光速(这光速小于真空中的光速)时, 就会激发锥形的电磁辐射, 在这种辐射称为切连科夫辐射. 高能物理实验中利用这种现象测定粒子的速度.

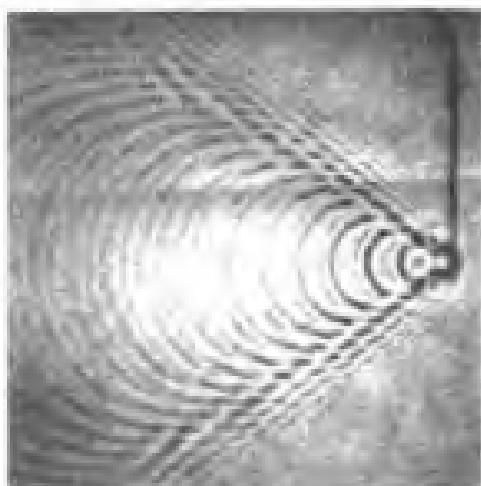


图 6.34 舷波

思考题

- 6-1 什么叫波动? 波动与振动有什么区别? 有什么联系? 具备哪些条件才能形成机械波?
- 6-2 简谐波的波函数与谐振动方程有什么不同? 有什么联系?
- 6-3 平面波的波函数 $y = A \cos[\omega(t - x/u) + \phi_0]$ 中, x/u 表示什么? ϕ_0 表示什么? 如写成 $y = A \cos(\omega t - \frac{\omega}{u}x + \phi_0)$, $\frac{\omega}{u}x$ 又表示什么?
- 6-4 波在介质中传播时, 为什么任一体积元中的动能和势能有相同的位相?
- 6-5 两波能产生干涉现象的条件是什么?
- 6-6 若两波源发出振动方向相同, 频率相同的波, 在空间相遇时, 是否一定能发生干涉? 为什么?
- 6-7 两相干平面余弦波, 振幅都是 A_0 , 相位差 $\pi/2$, 沿同一方面传播, 则合成波的振幅是多少?
- 6-8 驻波是怎样形成的? 与行波比较驻波有什么特点?
- 6-9 驻波形成以后, 介质中各质元的振动相位有什么关系? 为什么说驻波中的相位没有传播?
- 6-10 什么叫多普勒效应? 多普勒效应发生的条件是什么?

习 题

6-1 波源作简谐振动,其运动方程为 $y = 4.0 \times 10^{-3} \cos(240\pi t)$ (SI),它所产生的波以 30m/s 的速度沿一直线传播.求

- (1) 波的周期及波长;
- (2) 波函数.

6-2 已知一波函数为 $y = 0.05 \cos(10\pi t - 2x)$ (SI)

- 求:(1) 求周期、频率、波速及波长;
(2) 说明 $x = 0$ 时波函数的意义.

6-3 一横波的波函数为 $y = 0.20 \cos(2.5\pi t - \pi x)$ (SI),它沿一绳子传播.

- (1) 求波的振幅、波速、频率及波长;
- (2) 求绳上质点振动时的最大速度;
- (3) 分别画出 $t = 1\text{s}$ 和 $t = 2\text{s}$ 时的波形,并指出波峰和波谷.画出 $x = 1.2\text{m}$ 处质点的振动曲线并讨论波形图的不同.

6-4 波源作简谐振动,周期为 0.02s ,并以它经平衡位置向正方向运动时作为计时起点.若振动以 $100\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度沿直线传播.求

- (1) 波源的振动方程;
- (2) 波函数;
- (3) 距波源 15.0m 和 5.0m 处质点的振动方程和初相;
- (4) 距波源 16.0m 和 17.0m 的两质点间的相位差.

6-5 图示为一平面谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图,此波以波速 $u = 2.5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 沿 x 轴的负向传播.

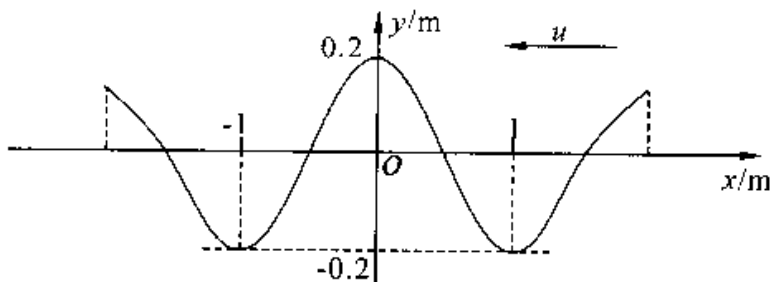


图 6.35

(1) 写出此波的波函数;

(2) 画出 $t = \frac{T}{4}$ 周期的波形图;

(3) 在 $t = 0$ 时的波形图上标出该时刻各质点的运动方向;

(4) $t = 0$ 时刻在 $x = 3\text{m}$ 处之振动状态, 在什么时刻传到 $x = 1\text{m}$ 处?

6-6 有一平面谐波, 波长为 12m , 沿 x 轴负向传播. 图示为 $x = 1.0\text{m}$ 处质点的振动曲线, 求此波的波函数.

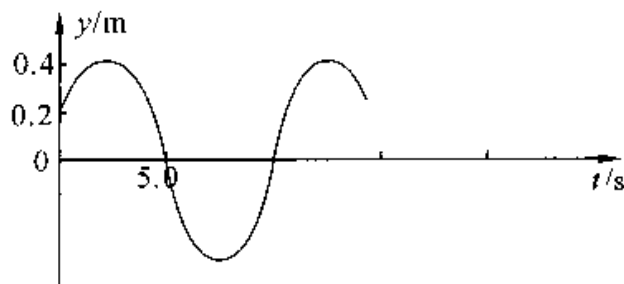


图 6.36

6-7 功率为 4.0W (瓦) 的点波源, 在均匀、无吸收的各向同性介质中发射球面波. 求距离波源 5.0m 处的波强.

6-8 有一波在密度为 $\rho = 8.0 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 的均匀介质中传播, 其速度 $u = 1.0 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 振幅 $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{m}$, 频率为 $\nu = 1.0 \times 10^3 \text{Hz}$. 求

(1) 该波的能流密度;

(2) 在一分钟内垂直通过 $S = 4.0 \times 10^{-4} \text{m}^2$ 的总能量.

6-9 如图所示, P, Q 是两相干波源, 它们处在同一介质中, 并产生相干波. 设振幅相同、初位相同、频率为 ν 、波长为 λ . 其中 $\overline{PQ} = \frac{3\lambda}{2}$, R 为 PQ 延长线上一点. 求

(1) 自 P, Q 两波源发出的波在 R 点引起的两个振动的相位差;

(2) R 点合振动的振幅.



图 6.37

6-10 位于 A, B 两点的两个波源, 振幅相等, 频率都是 100Hz , 相差为 π . 若 A, B 两点相距 30m , 波速为 $400\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求 A, B 连线上二者之间因干涉而静止的各点

的位置.

6-11 设入射波的波函数为 $y_{\lambda} = A \cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$, 在 $x = 0$ 处发生反射, 反射点为一自由端.

- (1) 写出反射波的波函数;
- (2) 写出驻波的波函数;
- (3) 说明那些点是波腹?那些点是波节?

6-12 如图所示, 有一平面简谐波沿 x 轴的正方向传播, 振幅为 A , 频率为 ν , 波速为 u .

(1) 在原点处的质元由平衡位置向 y 轴的正方向运动时作计时起点, 写出此波的波函数;

(2) 设反射波的振幅与入射波的振幅相等, 写出反射波的波函数, 并求在 x 轴上因干涉而静止的各点的位置.

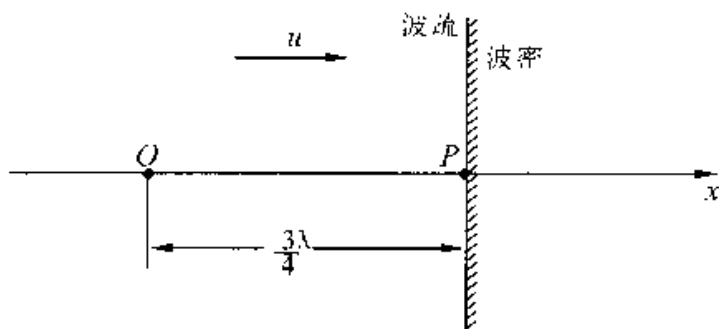


图 6.38

6-13 一警车以 $25\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度在行驶, 设车上警笛的频率为 800Hz , 空气中的声速为 $330\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求

- (1) 站在路边的人听到警车驶近和离去时警笛声的频率;
- (2) 如果警车追赶一辆速度为 15 的客车, 则客车上的人听到警笛声的频率是多少?

6-14 一人站在铁路旁, 听到迎面驶来的火车汽笛声的频率为 440Hz , 当火车驶过他的身旁之后, 他听到汽笛声的频率为 392Hz , 问火车行驶的速度为多少? 设空中的声速为 $330\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

第 7 章 气体动理论

前面我们研究了最简单的物质运动形式——机械运动的规律. 在这一章里, 将研究物质的另一种运动形式——热运动的规律.

众所周知, 自然界一切宏观物体都是由数量极大的分子所组成的, 这些分子都处于永不停息的无规则运动(称为分子热运动)之中, 各种热现象都是分子热运动的宏观表现. 在经典的热运动理论中, 假定个别分子的运动都遵循牛顿运动定律. 初看起来, 似乎只要知道物体中每个分子运动的初始条件和所有分子之间的相互作用, 就能通过逐个求解每一分子的运动方程, 确定它们在每一时刻的运动情况, 从而说明宏观热现象的规律. 但实际上这是不可能的, 这不仅是因为分子数目太多, 使我们无法确定每个分子的初始条件以及分子间相互作用的情况, 即使知道了相互作用和初始条件, 也无法进行求解, 而且在研究热运动规律时, 这样做也是不必要的. 因为在各种宏观热现象中, 起决定作用的, 不是个别分子的运动情况, 而是大量分子的集体行为. 热运动是一种比机械运动更复杂的运动形式, 它所遵循的规律——统计规律与机械运动规律也有本质的区别. 本章将以理想气体为研究对象, 从物质的微观结构模型出发, 运用统计的方法, 来研究其热运动规律.

§ 7.1 气体分子热运动的规律

一、分子热运动的图像

人们从大量实验事实中得到了对分子热运动的认识, 它可归纳为以下几点:

(1) 宏观物体是由大量分子(或原子)组成的, 1mol 任何物质, 都包含有 $N_0 = 6.022 \times 10^{23}$ 个分子, 在标准状况下, 1cm^3 任何气体都包含有 2.7×10^{19} 个分子.

(2) 一切物质的分子都在永不停息地无规则地运动着. 每个分子在运动过程中都要与其它分子频繁地发生碰撞, 从而导致其速度的大小和方向不断变化, 这就使整个物体内部分子的运动状况呈现出一片杂乱无章的景象. 这种无规则运动的剧烈

程度与物体的温度有关,温度愈高,分子无规则运动愈剧烈.把分子的这种无规则运动称为热运动.

(3) 分子间存在着相互作用力——分子力.分子间存在着引力同时又存在着斥力,二者都随分子间距离 r 的增大而急剧地减小,其合力就是所谓的分子力.分子力 f 与 r 的关系如图 7.1 所示.当 $r < r_0$ 时, $f > 0$, 分子力表现为斥力;当 $r > r_0$ 时, $f < 0$, 分子力表现为引力,当 $r = r_0$ 时, $f = 0$;当 $r \gg r_0$ 时, $f \rightarrow 0$, 表明分子力是一种短程力,只有当它们很接近时才能显现出来.

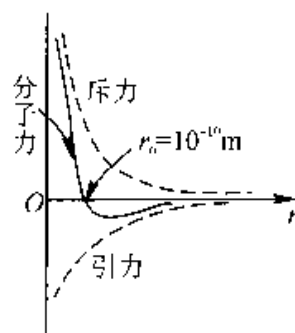


图 7.1

分子力起源于电磁相互作用,是一种保守力.

二、统计规律性

现在,让我们以伽耳顿板实验为例来阐明统计规律的意义.

如图 7.2a 所示,在一块竖直放置的木板上部,规则地钉上许多铁钉,木板下部用竖直隔板分隔成许多等宽的狭槽.木板顶部置一漏斗,若向漏斗中投入一个小球.在下落过程中小球先后与多个铁钉相碰,经过曲折的路径,最后落入下部某一狭槽内.

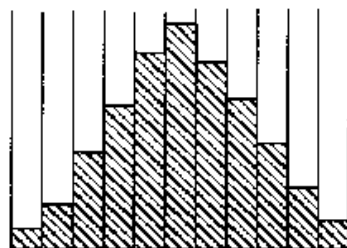
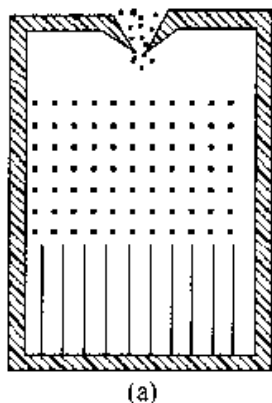


图 7.2

从实验中可以发现,每次投入的小球究竟落入哪个槽内,完全是偶然的,无法事先预卜.这种在一定条件下,可能发生的这样或那样的试验结果,称为偶然事件或随机事件.

向漏斗内投入一个或少数几个小球虽然无法预料其结果,但若先后或同时从漏斗中投入足够多的小球,则可发现小球在槽内的分布表现出的规律性:各槽内落入

的小球数目具有大体确定的比例,中部的几个槽内落入的小球较多,两边的槽内落入的小球较少,如图 7.2b 所示.

在伽耳顿板实验中,个别事件虽具有偶然性,但大量事件却表现出必然性.这种对大量的偶然事件的总体起作用的规律,称为统计规律.个别偶然事件的出现虽有各自的因果关系,但对大量偶然事件而言,个别事件的特征退居次要地位,重要的是在总体上显示了统计规律性.

满足统计规律的前提是必须有大量的事件.参与的事件数目愈多,规律性就愈明显,愈趋于稳定.在通常条件下,一定量气体中所包含的分子数是非常大的,虽然个别分子速度的大小和方向都因频繁的碰撞而经常发生不可预测的变化,但是,对于大量气体分子的总体来说,在一定温度下,分子的速度分布却遵循着确定的统计规律.

例如,在相同条件下,多次抛掷同一枚质地均匀的硬币,可以发现出现正面(或反面)的次数与抛掷总次数之比总是在 0.5 左右.当抛掷次数很多时,比值趋于稳定,我们就说“出现正面(或反面)的概率是 0.5”.

§ 7.2 平衡态及理想气体的状态方程

一、宏观量与微观量

研究与分子热运动有关的问题时,通常将所研究的物体系统称为热力学系统,简称系统.在气体动理论中,系统就是我们所研究的那部分气体,它包含大量气体分子.

每一分子都具有各自的质量、大小、位置、速度、动能、势能等,这些描述个别分子特征的物理量,称为微观量.通常在实验中测得的是描述大量分子集体特征的物理量,称为宏观量,如气体的体积、压强、温度等.大量分子的集体所处的状态称为宏观态.由系统中所有分子的微观特征来确定的状态称为微观态,一个宏观态可能对应于很多个微观态,与不同的宏观态对应的微观态的数目,往往是不相同的.宏观量与微观量之间,存在一定的内在联系.运用统计方法,求出大量分子的一些微观量的统计平均值,确定它们与相应的宏观量的关系,用以解释在实验中观察到的气体的宏观性质,这便是气体动理论的任务.

二、平衡态

宏观态可分为平衡态或非平衡态.无数实验事实表明,任何一个系统,不论其初

始的宏观状态如何,只要不受外界影响,经过一定时间后,必将达到一个确定的状态,在该状态下,系统的一切宏观性质都不随时间变化.例如,在容器内盛入一定量的气体,如果它与外界没有能量交换,系统内部也没有任何形式的能量转换,经过一段时间后,容器中气体的密度、温度、压强等将处处相同,而且不再发生变化.又如,两冷热程度不同的物体相互接触后,冷的物体变热,热的物体变冷,经过一定时间后,两物体各处的冷热程度变得均匀一致,此后如果没有外界影响,它们所组成的系统将始终保持这个状态,不再发生任何变化.这种在不受外界影响的条件下系统宏观性质不随时间变化的状态,称为平衡态.否则,就是非平衡态.

应当指出,不能把平衡态简单地说是随时间变化的状态.例如,把金属杆一端放在沸水中,另一端放在冰水混合物内,经过一定时间后,金属杆各处的温度虽然不同,也不随时间变化.但是,对金属杆来说,这时存在着外界影响,它所处的宏观态并不是平衡态.

还要指出,系统处于平衡态时,虽然宏观性质不再随时间变化,但从微观角度考虑,组成系统的大量分子仍在不停地运动着,只不过是大量分子运动的平均效果不随时间变而已.例如,有一个密闭容器,被隔板分为A、B二部分(图7.3),开始时A部贮有气体,B部为真空.把隔板抽出后,A部的气体就向B部运动,

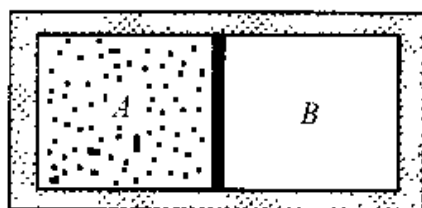


图 7.3

在这过程中,气体中各处的状况,例如分子数密度(单位体积的分子数)是不同的,随时间而变化.最后达到处处均匀.此后如果没有外界影响,容器内的气体将始终保持这一状态,不再发生宏观变化,即达到了平衡态.但由于分子的永不停息的运动,A部的分子仍会跑到B部去,B部的分子也会跑到A部来,但平均地说,在任意一段时间内,两部分交换的分子数相同,宏观上表现为分子数密度不随时间变化,呈动态平衡,通常把这种平衡称为热动平衡.

完全不受外界影响,宏观性质保持绝对不变的系统,在实际中是不存在的,所以平衡态只是一种理想的情况,它是在一定条件下对实际情的概括和抽象.由于许多实际情况可近似地视为平衡态,处理方法比较简便,所以对平衡态的讨论具有实际意义.

三、理想气体的状态方程

处于平衡态的气体可以用一些确定的物理量(如温度、压强、体积等)来描述该

状态的宏观属性,这些确定量称为气体的状态参量.状态参量的每一组数值,对应于一个宏观态,气体的宏观态发生变化时,状态参量也会发生相应变化.但处于非平衡态的气体,由于各部分性质不同,且随时间而变化,所以不能用一组参量来描述.

实验表明,处于平衡态的气体的3个状态参量压强 P 、体积 V 、温度 T 之间,存在着一定的关系.反映平衡态下气体的状态参量压强 P 、体积 V 、温度 T 之间关系的方程,称为气体的状态方程.状态方程可以写成显函数形式,即将其中一个参量可表示成其余两个参量的函数,如

$$T = f(P, V) \quad (7-1)$$

也可以写成隐函数形式,如

$$F(P, V, T) = 0 \quad (7-2)$$

状态方程与气体的性质有关,其形式通常是很复杂的.这里只介绍理想气体的状态方程.

理想气体是分子动理论中的一个理想模型,它所指的是在任何情况下都严格遵守三条实验定律(即玻意耳—马略特定律,盖·吕萨克定律和查理定律)的气体.

实验表明,在温度不太低,压强不太大时,很多实际气体,如氢、氮、氧等,都可看作理想气体,因此,研究理想气体状态方程具有重要意义.

在中学物理中已经介绍过理想气体状态方程的一种常用的形式

$$PV = \frac{M}{\mu}RT \quad (7-3)$$

式中 M 为所研究气体的质量, μ 是其摩尔质量, R 是普适气体常量.在SI制中, P 的单位是帕斯卡(Pa), V 的单位是米³(m³), T 的单位是开尔文(K).

$$R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

在气体动理论中,常采用理想气体状态方程的另一形式,它容易由式(7-3)变换而得.

现在假设所研究的气体中包含有 N 个分子,每个分子的质量为 m ,则 $\mu = N_0 m$, $M = Nm$,代入式(7-3),可得

$$PV = \frac{Nm}{N_0 m}RT$$

因 R 与 N_0 均是恒量,两者之比仍为恒量,称为玻耳兹曼常量,用 k 表示,

$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8.31}{6.022 \times 10^{23}} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

由于 $\frac{N}{V} = n$, n 为单位体积中的分子数, 即分子数密度, 式(7-3)可进一步改写为

$$P = nkT \quad (7-4)$$

这就是理想气体状态方程的另一形式.

§ 7.3 理想气体的压强和温度的统计意义

压强和温度是气体的两个重要的宏观量, 下面我们从理想气体的微观模型出发, 阐明这两个量的微观本质, 并运用统计方法, 导出它们与描述分子运动的微观量之间的关系.

一、理想气体的微观模型

从实验中知道, 在标准状态下, 气体的密度大约是它凝结成液体的 1/1000 倍. 假如认为在液体中分子是紧密排列的, 则气体分子之间的平均距离大约是分子本身线度的 $\sqrt[3]{1000} = 10$ 倍. 分子在气体系统内分布的相当稀疏, 分子间的相互作用力, 除碰撞瞬时外, 极为微小. 据此人们提出理想气体的微观模型如下:

(1) 理想分子可视为体积可以忽略的小球.

(2) 除分子间发生碰撞或分子与器壁发生碰撞的瞬间作用力之外, 分子间及分子与器壁之间的其它相互作用力可以忽略.

(3) 把分子看成是完全弹性球, 分子之间及分子与器壁之间的碰撞是完全弹性碰撞.

概括地说, 理想气体是大量自由地、无规则地运动着的弹性球分子的集合. 它是真实气体的近似. 气体愈稀薄, 温度愈高, 真实气体愈接近理想气体.

二、统计假设

具体推理想气体压强公式时, 对于大量气体分子的集体, 还需提出统计假设. 根据平衡态下气体密度到处均匀这一事实, 我们可以假定, 对大量气体分子来说, 分子沿各个方向运动的机会是均等的, 即向各个方向运动的概率相同. 由此可以推断, 分子速度沿各个方向的分量的统计平均值均等于零, 各分量的平方的统计平均值相等, 即

$$\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

由分子速率与速度分量间的关系 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, 可进一步推得

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

三、理想气体的压强公式

气体的压强是气体作用在容器器壁单位面积上的指向器壁的垂直作用力. 从气体动理论的观点来看, 压强是大量气体分子对器壁碰撞的平均效应. 无规则运动的气体分子与器壁不断发生碰撞, 使器壁受到冲力作用. 就个别分子而言, 它每次碰在什么地方, 对器壁的冲力多大, 都是偶然的、断续的. 但是对大量分子的整体来说, 由于每一时刻都有许多分子在处处与器壁相碰, 器壁就受到一个均匀、恒定、持续的作用力, 这便是压强产生的微观本质.

现在从理想气体的微观模型出发, 对各个分子应用力学定律, 对大量气体分子的集体运用统计假设和统计平均方法, 推导平衡态下理想气体的压强和描述分子运动的微观量之间的关系.

为简便起见, 假设在一各边分别为 l_1, l_2, l_3 的长方容器内装有某种气体 (如图 7.4), 其中共有 N 个气体分子, 每个分子的质量为 m , 由于分子所受的重力可以忽略不计, 分子的总能量仅有动能.

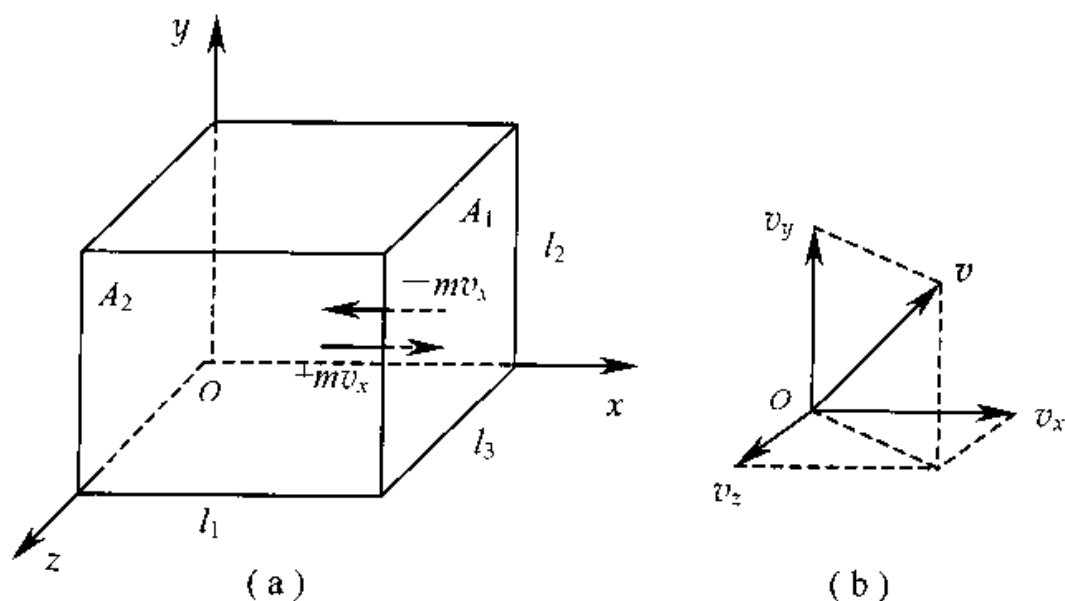


图 7.4 气体动理论压强公式的推导

在平衡态下,气体的压强处处相同,因此只需考虑某个特定的器壁(如 A_1 面),计算气体对它的压强.具体步骤如下:

(1) 求第 i 个分子与器壁碰撞一次施于器壁的冲量.

设第 i 个分子与 A_1 面发生弹性碰撞.碰撞前速度的 x 分量为 v_x ,碰撞后速度的 x 分量变为 $-v_x$.碰撞前后第 i 个分子在 x 方向的动量增量应为 $-2mv_x$.根据动量定理,器壁 A_1 施于分子 i 的冲量为 $-2mv_x$.由牛顿第三定律可知,分子施于 A_1 面的冲量为 $2mv_x$.

(2) 求第 i 个分子对 A_1 面平均冲力.

分子 i 从 A_1 面弹回后,沿 $-x$ 方向运动,与 A_2 面碰撞后弹回又与 A_1 面碰撞.在此过程中分子 i 沿 x 方向经过的路程为 $2l_1$,经历的时间应为 $\frac{2l_1}{v_x}$,很显然,单位时间内的碰撞次数为 $\frac{v_x}{2l_1}$,于是单位时间内第 i 个分子施于 A_1 面的冲量(即平均冲力)为

$$2mv_x \cdot \frac{v_x}{2l_1} = \frac{mv_x^2}{l_1}$$

(3) 求 N 个分子施于 A_1 面的平均冲力.

由于容器内每个分子都与 A_1 面碰撞,因此 N 个分子施于 A_1 面的平均冲力为

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{l_1} \\ &= \frac{m}{l_1} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2) \\ &= \frac{Nm}{l_1} \frac{(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2)}{N} = \frac{Nm}{l_1} \bar{v}_x^2 \end{aligned}$$

其中 $\bar{v}_x^2 = \frac{(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2)}{N}$ 是所有分子速度的 x 分量平方的平均值.

(4) 求 A_1 面受到的压强.

由压强的定义可得, A_1 面受到的压强为

$$P = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{Nm}{l_1 l_2 l_3} \bar{v}_x^2 = mn \bar{v}_x^2$$

其中 $n = \frac{N}{V} = \frac{N}{l_1 l_2 l_3}$, 为分子数密度.

(5) 求理想气体的压强.

对处于平衡态的理想气体应用统计假设

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

可得

$$P = \frac{1}{3} nm \overline{v^2}$$

或

$$P = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \overline{\epsilon_k} \quad (7-5)$$

式中 $\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ 是气体分子的平均平动动能, 式(7-5)即为理想气体的压强公式.

从上述推导过程可以看出, 压强公式是一条统计规律, 只适用于大量气体分子组成的系统, 宏观量 P 是微观量 $n, \overline{\epsilon_k}$ 的统计平均值, 压强 P 只具有统计意义, 对单个分子或少数分子谈压强是没有意义的.

四、温度统计意义

将压强公式(7-5)和状态方程(7-4)相比较可得,

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad (7-6)$$

或

$$T = \frac{2}{3k} \overline{\epsilon_k} \quad (7-7)$$

该式称为理想气体的温度公式. 它给出了宏观量 T 与微观量的统计平均值 $\overline{\epsilon_k}$ 间的联系, 也是一条统计规律. 它提示了温度的微观本质: 气体的温度是大量气体分子热运动剧烈程度的量度. 温度这个物理量也只具有统计意义, 对一个或几个分子谈论温度是无意义的.

最后需要指出, 由式(7-6)似乎可以得出, 当 $T = 0\text{K}$ 时, 分子热运动将会停息. 这个结论是不正确的, 因该式是建立在经典物理基础上, 有一定的局限性. 该式只对理想气体才适用, 在达到绝对零度前, 气体早已变成液态或固态, 公式已不再适用. 近代的理论计算指出, 即使在 0K 时, 固体的点阵粒子仍具有能量, 这已得到实验的证实.

例 7-1 氧气的温度为 300K , 求氧分子的方均根速率和平均平动动能.

解 首先推导方均根速率公式, 再代入数据计算.

由式(7-6)得出方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (7-8)$$

等号右端根号内分子分母同乘以阿伏伽德罗常数 N_0 , 注意到 $\mu = mN_0$ 及 $R = N_0 k$, 则有

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (7-9)$$

所以 300K 时氧分子的方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 300}{32 \times 10^{-3}}} = 484 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又由式(7-6)得氧分子的平均平动动能为

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times (1.38 \times 10^{-23}) \times 300 \\ &= 6.21 \times 10^{-21} \text{ J} \end{aligned}$$

例 7-2 有 10^{23} 个质量为 $5 \times 10^{-26} \text{ kg}$ 的气体分子, 贮于容积为 10^3 m^3 的容器内, 已知气体分子的方均根速率为 $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求气体的压强和温度.

解 由式(7-5)得气体的压强为

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{10^{23}}{10^{-3}} \times \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-26} \times 400^2 \right) \\ &= 2.67 \times 10^5 \text{ (N} \cdot \text{m}^{-2}) \end{aligned}$$

又由式(7-6)得气体的温度为

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{3} k \epsilon_k = \frac{2}{3k} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{m \overline{v^2}}{3k} \\ &= \frac{5 \times 10^{-26} \times 400^2}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 193 \text{ K} \end{aligned}$$

§ 7.4 麦克斯韦速率分布律

式(7-5)和式(7-7)给出了理想气体的压强、温度与分子速率平方的统计平均值的关系. 在平衡态下, 气体具有确定的压强和温度, 因此, 分子速率平方的统计平均值也是完全确定的, 大量气体分子集体的速率分布应当服从一定的统计规律, 也就是说, 在确定的速率范围内的分子数应当有确定的比例, 否则就难以在长时间内呈现稳定的统计平均值. 早在 1859 年, 麦克斯韦就从理论上导出了气体分子的速

率分布律,这个规律后来得到了实验的证实.在这里我们不详细论述这个定律的推导过程,只介绍与定律有关的一些基本内容.

一、速率分布函数

按照经典力学观点,气体的分子速率 v 可以连续地取从零到无限大间的任意数值,为了求得气体分子按速率的分布情况,我们先求速率分布函数.

设有--定量的气体分子,分子总数为 N .把整个速率范围划分为许多个相等的速率区间,若速率在区间 $v-v+\Delta v$ 内的分子数为 ΔN ,则 $\frac{\Delta N}{N}$ 就代表速率分布在这一区间的分子数占总分子数的比率.当求出了各不同速率区间内分子数的比率,就知道了分子速率的分布情况.表 7-1 给出了在 0°C 时氧分子的速率分布.

显然,对速率分布情况了解的精细程度,取决于划分速率区间的大小,速率区间划分得愈小,分布情况的描述就愈细致,当速率区间 Δv 足够小时,就能得到关于速率分布的精确情况.麦克斯韦指出,处于平衡态的气体, $\frac{\Delta N}{N}$ 与所考虑的速率 v 及所取速率区间 Δv 的大小都有关.为了便于比较,应当把各个速率区间取得相等.当 $\Delta v \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta N}{N\Delta v}$ 的极限是速率 v 的确定的函数,称为速率分布函数,用 $f(v)$ 表示,即

$$f(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N\Delta v} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv} \quad (7-10)$$

表 7-1

速率区间 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	分子数的百分率 ($\frac{\Delta N}{N} \times 100\%$)
100 以下	1.4
100 ~ 200	8.1
200 ~ 300	16.5
300 ~ 400	21.4
400 ~ 500	20.6
500 ~ 600	15.1
600 ~ 700	9.2
700 ~ 800	4.8
800 ~ 900	2.0
900 以上	0.9

速率分布函数表示在速率 v 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比,就是说分子出现在 v 附近单位速率区间内的概率.

知道了 $f(v)$ 后,通过积分可以求出在任意速率范围($v_1 \rightarrow v_2$) 内的气体分子数占分子总数的比率

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv \quad (7-11)$$

速率分布函数的归一化条件为

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (7-12)$$

这是由速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义决定的,因为全部分子要百分之百地分布在从零到无限大的整个速率范围内.

二、麦克斯韦速率分布律

1859年,麦克斯韦从理论上推出,在平衡态下,理想气体的速率分布函数的表达式为

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (7-13)$$

由式(7-10)可得

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (7-14)$$

这就是麦克斯韦速率分布律.它指出了在任一率区间 $v \rightarrow v+dv$ 内的分子数 dN 占总分子数 N 的比率.式(7-14)中 T 为气体的热力学温度, m 为气体分子的质量, k 为玻尔兹曼常量.

为了形象地表明速率分布情况,以 v 为横坐标, $f(v)$ 为纵坐标画出一曲线,称为麦克斯韦速率分布曲线,如图 7.5 所示.

根据速率分布曲线作如下讨论:

(1) 气体分子的速率有一个宽广的分布.从图 7.5 可以看出,从原点出发,经过一极大值后,随 v 的增大而渐近于横轴,这表明气体分子的速率可以取由零到无限大的一切可能值,但速率很大和速率很小的分子所战友的百分比都很小,而具有中等速率的分子所占的百分比则很大.由于

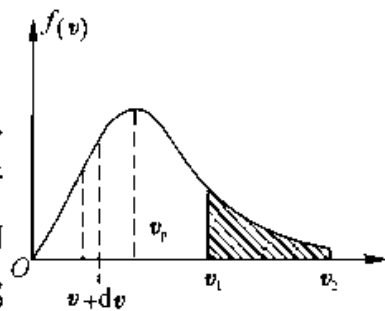


图 7.5

最小速率是零,最大速率却趋于无限大,所以,与曲线极大值相对应的速率两边的曲线是不对称的.

(2) 速率分布曲线有一极大值,与其对应的速率称为最概然速率,常以 v_P 表示,其物理意义是:如果把整个速率范围划分为许多相等的小区间,则分布在由 $v_P \rightarrow v_P + dv$ 所在区间内的气体分子所占的比率最大,或者说,气体分子具有这个速率区间内的速率的概率最大.

(3) 曲线下狭窄条面积给出了速率分布在该区间的分子数占总分子数的比率,即

$$ds = f(v)dv = \frac{dN}{N} \quad (7-15)$$

有限速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内的分子数比率

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$$

等于 $v_1 \sim v_2$ 曲线下的面积.

相应的归一化条件

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

代表了整个曲线下的面积.

(4) 对于一定质量的气体,速率分布曲线的形状随温度而异.温度升高时,气体中速率较大的分子数增多,曲线峰值的位置将右移,但由于曲线下的总面积是恒定的,所以曲线的高度要降低,变得较为平坦.图 7.6 给出了氧分子在 300K, 1000K 和 2000K 三个温度下的速率分布曲线.

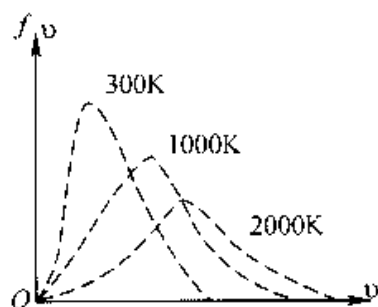


图 7.6

(5) 在相同温度下,速率分布曲线的形状随气体分子的质量而异.分子质量较小的气体中,大速率的分子较多,曲线峰值位置向右延伸,高度降低,分布曲线变得较为平坦,比照图 7.6,读者可自己画图表示此关系.

三、三种统计速率

利用速率分布函数可求得气体分子的 3 种统计速率.

(1) 最概然速率 v_P 由于最概然速率对应于速率分布函数曲线的极大值,故 v_P

可由令 $f(v)$ 对 v 的一阶导数为零求得, 即

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

将 $f(v)$ 的表达式(7-13) 代入上式计算可得

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad (7-16)$$

(2) 平均速率 \bar{v} 气体分子速率的统计平均值叫做气体分子的平均速率. 将式(7-13) 代入式(7-1) 经过计算可得

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \mu}} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (7-17)$$

(3) 方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2}$ 气体分子速率的平方的统计平均值的平方根叫方均根速率. 根据上面同样的计算

$$\bar{v}^2 = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

$$\text{可得} \quad \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kt}{m}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (7-18)$$

由上面的计算可知, 这 3 种速率都具有统计意义. 比较 3 种速率值可以看出, 它们具有相同的规律: 与 \sqrt{T} 成正比, 与 \sqrt{m} (或 $\sqrt{\mu}$) 成反比. 它们的大小顺序为: $v_p < \bar{v} < \sqrt{\bar{v}^2}$. 这 3 种速率各有不同的用处, 在讨论速率分布时, 要用到 v_p , 在后面计算分子的平均自由程时, 要用到 \bar{v} , 而在计算分子的平均平动动能时, 要用到 $\sqrt{\bar{v}^2}$.

例 7-3 试计算在 $t = 20^\circ\text{C}$ 时氢气和氧气的方均根速率.

解 由式(7-18) 可得

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{v}^2} \Big|_{\text{H}_2} &= 1.73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 1.73 \sqrt{\frac{8.31 \times 293}{2.0 \times 10^{-3}}} \\ &= 1.91 \times 10^3 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \sqrt{\bar{v}^2} \Big|_{\text{O}_2} \\ &= 1.73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 1.73 \sqrt{\frac{8.31 \times 293}{32 \times 10^{-3}}} \\ &= 4.78 \times 10^2 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \end{aligned}$$

由计算结果可知, 在相同温度下, 氢的气体分子的方均根速率大. 如果将摩尔质量不同的气体分子组成的混合气体, 装于抽真空的带有一多孔壁的容器中的一边,

则混合气体在通过多孔壁向真空一边扩散的过程中,较轻的分子由于方均根速率大就会跑在前面.应用多级“过滤”法,就可分离出较轻的气体分子.此法可用来分离同位素,如可从六氟化铀中分离出含量较少的核燃料 ^{235}U .

例 7-4 求标准状况下 1.0cm^3 氮气中速率在 $500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 到 $501\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 之间的分子数.

解 由 $P = nkT$ 得

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} = 2.69 \times 10^{27} \text{m}^{-3}$$

所以 1.0cm^3 氮气中分子总数为

$$N = nV = 2.69 \times 10^{27} \times 10^{-6} = 2.69 \times 10^{21} \text{(个)}$$

因考虑的分子速率区间很小,麦克斯韦速率分布律可直接写成

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \Delta v$$

为计算方便,再将上式作适当变换.因为 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$,所以上式中 $\sqrt{\frac{m}{2kT}}$ 部分可

用 v_p 来表示,即 $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_p^3 e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \cdot v^2 \Delta v$

$$\text{又因 } v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 273}{28 \times 10^{-3}}} = 402 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\Delta v = 501 - 500 = 1 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

故速率在 $500-501(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 区间内的分子数为

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{4N}{\sqrt{\pi}} v_p^{-3} e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} v^2 \Delta v \\ &= \frac{4N}{\sqrt{\pi}} v_p^{-1} \cdot e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \left(\frac{v}{v_p}\right)^2 \Delta v \end{aligned}$$

由于 500 与 501 相关甚微,所以在该区间内气体分子的速率均可取 $v = 500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,代入数据有

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{4 \times (2.69 \times 10^{21})}{\sqrt{3.142}} (402)^{-1} \cdot e^{-\left(\frac{500}{402}\right)^2} \cdot \left(\frac{500}{402}\right)^2 \cdot 1 \\ &= 5.00 \times 10^{16} \text{(个)} \end{aligned}$$

请注意,如果速率间隔较大,则要用式(7-15)

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

通过积分求得.

四、麦克斯韦速率分布律的实验验证

在麦克斯韦推导出速率分布关系时,由于当时不能获得足够高的真空,未能用实验来验证.到本世纪20年代后,随着真空技术的发展,这种验证才成为可能.最早测定分子速率的是斯特恩(1920),随后又有一些物理学家设计了不同的实验设置.我国葛正权教授测定了铋(Bi)蒸汽分子的速率分布(1934),结果都与麦克斯韦分布律基本相符.下面所介绍的密勤和库士所做的实验(1955)是一个精度较高的实验.其装置如图7.7所示.

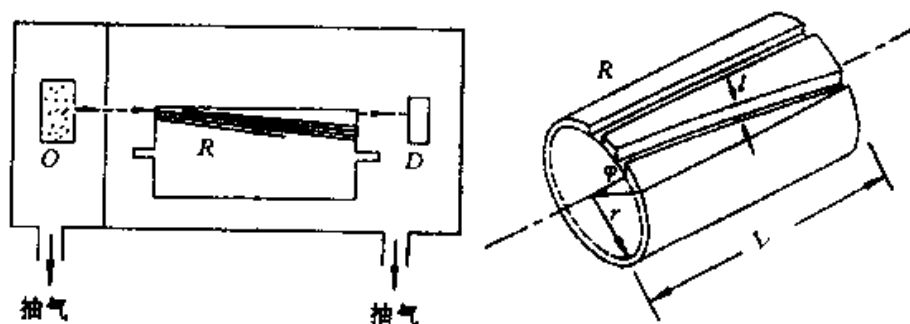


图 7.7

图中容器O是蒸汽源,把少量铋放在容器中均匀加热,使其蒸发而获得在一定温度下平衡态的铋蒸汽(温度为870K、蒸汽压为4.27Pa).在器壁上开有一狭缝S,以便于铋蒸汽能从容器中逸出,从而得到含有各种速率的铋分子射线.R是用铝合金制成的圆体,长度为 l ,可绕中心轴线转动.在圆柱体上均匀地刻制了一些螺旋状的细槽(图中只画了一条),细槽的出口狭缝与入口狭缝间夹一角度 ϕ .D为一检测器,用来接收通过细槽的分子射线并测定其强度.整个装置放在真空度为 1.33×10^{-5} Pa的容器中.

实验时,当圆柱体以一定的角速度 ω 转动,细槽入口狭缝与容器O上的狭缝S平行时,从蒸汽源逸出的具有各种速率的分子从圆柱体左端进入细槽.因为分子沿直线进行,而圆柱以一定的角速度 ω 转动,所以只有速率为某一定数值的分子才能穿过细槽从出口狭缝飞出,其余分子则与细槽相撞而沉积在槽壁上.分子如能穿过细槽,其穿越时间 $\frac{l}{v}$ 应等于圆柱体转过角 ϕ 所需要的时间 $\frac{\phi}{\omega}$.由此可以得出,穿过细槽

的分子的速率应当满足下式

$$v = \frac{\omega}{\phi} l$$

改变角速度 ω , 可使不同速率的分子穿过细槽. 可见刻有细槽的转动圆柱体实际上是一个滤速器. 由于入口狭缝和出口狭缝都有一定的宽度, 这相当于圆柱体两端的狭缝间的夹角 ϕ 有一定的范围. 因此, 当圆柱体的角速度 ω 一定时, 能够穿过细槽的分子速率并不严格相等, 而是分布在一个区间 $v - v + \Delta v$ 内.

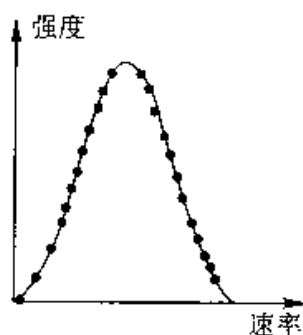


图 7.8

在实验时, 使圆柱体以不同的角度转动, 用检验器测出对应的区间内的分子射线的强度, 就可确定蒸汽分子按速率分布的情况. 将实验结果与理论曲线相比较(图 7.8), 二者相当精确地吻合, 即验证了麦克斯韦速率分布律.

§ 7.5 玻尔兹曼分布律

上节我们研究的是气体处于平衡态时分子速率的分布规律. 玻尔兹曼把这一规律推广到分子处于外力场(如重力场、电场等)的情况, 得到了分子按能量的分布规律——玻尔兹曼能量分布律.

设分子的势能为 $E_P = E_P(x, y, z)$, 动能为 $E_k = E_k(v_x, v_y, v_z)$, 总能量 $E = E_k + E_P$. 玻尔兹曼从理论上导出: 当系统在外力场中处于热平衡态时, 坐标介于区间 $x - x + dx; y - y + dy; z - z + dz$ 内, 同时速度介于 $v_x - v_x + dv_x; v_y - v_y + dv_y; v_z - v_z + dv_z$ 内的分子数为

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_P + E_k}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz \quad (7-19)$$

式中 n_0 为势能 $E_P = 0$ 处单位体积内的分子数. 这个结论称为玻尔兹曼能量分布律. 它是一个普遍的规律, 对处于任何力场中的任何微粒系统(如气体、液体、固体中的原子和分子), 只要微粒间的相互作用可以忽略, 定律均能适用.

式(7-19)表明了, 在给定区间内分子数和区间间隔及能量有关. 当区间间隔给定时, $dN \propto e^{-\frac{E}{kT}}$, 它表示在相等的间隔内, 能量较大的分子数较少, 能量较小的分子

数较多,换言之,从统计观点看,在一定温度下分子处于低能态的概率要大一些.

若认为分子可以具有各种速度,考虑到麦克斯韦速率分布函数所满足的归一化条件,计算可以得出分布在坐标区间 $x \rightarrow x + dx, y \rightarrow y + dy, z \rightarrow z + dz$ 内具有各种速度的分子数为

$$dN' = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}} dx dy dz \quad (7-20)$$

它给出了分子在保守力场中的分布规律,由式(7-20)看出,在相同的坐标间隔(或体积元 $dx dy dz$)内,分子数的分布与 $e^{-\frac{E_p}{kT}}$ 有关,势能愈小,分子数愈多.

若用分子数密度 $n = \frac{dN}{dx dy dz}$ 表示上式,则有分子按势能的分布律

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}} \quad (7-21)$$

下面我们用玻尔兹曼能量分布律来研究几个问题.

(1) 在重力场中粒子按高度的分布. 气体分子受到两种互相对立的作用;无规则热运动将使气体分子均匀分布于它们所能到达的空间,重力则要使气体分子聚集在地面上. 当这两种作用达到平衡时,气体分子在空间作不均匀的分布,分子数密度随高度减小.

根据玻耳兹曼分布,可以确定气体分子在重力场中按高度分布的规律.

取 z 轴竖直向上,并以 $z = 0$ 处为重力势能的零点,且令 $z = 0$ 处分子数密度为 n_0 ,则由式(7-21)求得分子在高度 z 处单位体积内的分子数为

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \quad (7-22)$$

它表示在重力场中,分子密度 n 随高度的增大按指数规律而减少. 这一规律也仅适用于布朗运动的微粒.

(2) 气压随高度的变化——气压公式. 若把气体视为理想气体,则有 $P = nkT$, 由式(7-22)可得

$$P = n_0 kT e^{-\frac{mgz}{kT}} = P_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = P_0 e^{-\frac{\rho g z}{P_0}} \quad (7-23)$$

其中 $P_0 = n_0 kT$ 表示在 $z = 0$ 处的压强. 式(7-23)称为等温气压公式,表明大气压随高度的增加按指数规律减小. 但由于大气温度随高度而变,故上式计算结果,仅在一定的情况下才与实际相符.

例 7-5 求上升到什么高度时大气压强减至地面的 75%. 设空气温度为 0°C , 空气的摩尔质量 $\mu = 0.0289\text{kg}$.

解 由气压公式 $P = P_0 e^{-\frac{\mu g z}{RT}}$ 得

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\frac{\mu g z}{RT}}$$

两边取对数得

$$z = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{P_0}{P}$$

代入数据

$$z = \frac{8.31 \times 273}{0.0289 \times 9.8} \ln \frac{100}{75} = 2.3(\text{km})$$

在航空、登山活动中,先测量所在高度的大气压强,然后利用气压公式来估算所在处的高度.

§ 7.6 能量均分定理

一、自由度

完全确定一物体在空间位置所需的独立坐标数目,叫做这个物体的自由度.

决定一个在空间任意运动的质点的位置,需要三个独立坐标,如 x, y, z , 因此质点有三个自由度,它们都是平动自由度. 若由 N 个互相独立的质点组成一个系统,则该系统应为 $3N$ 个自由度.

如果对质点的运动加以限制(约束),把它限制在一个平面或曲面上运动,这样的质点就只有两个自由度了,若限制质点在一给定的直线或曲线上运动,则质点就只有一个自由度了. 把飞机、轮船和火车当作质点看,则在天空中任意飞行的飞机有三个自由度,在海面上任意航行的轮船有两个自由度,在路轨上行驶火车只有一个自由度.

一个刚体在空间作任意运动时,除平动外还有转动(图 7.9). 它的运动可以分解为质心的平动及绕通过质心的轴的转动. 其中:(1) 为了确定质心 O' 在平动过程中任一时刻的位置,需要三个独立坐标 x, y, z , 即刚体有三个平动自由度;(2) 与此同时,为了确定刚体绕通过质心 O' 的

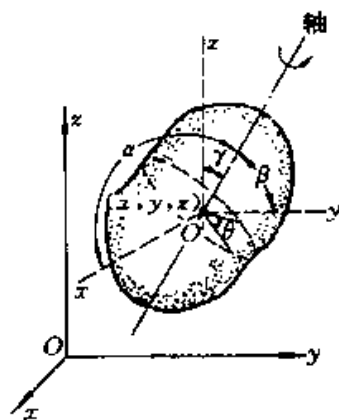


图 7.9 刚体的自由度

轴的转动状态,首先在确定该轴在空间的方位,这可用三个方向余弦($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$)表示,但由于存在着 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 的关系,所以三个量中只有两个是独立的,即确定转轴方位的自由度仅有两个;其次要确定刚体绕该轴的转动,可用转角 θ 表示,这就又有一个自由度.这样,刚体绕通过质心的轴的转动,共有三个转动自由度.

因此,任意运动的刚体共有六个自由度,即三个平动自由度和三个转动自由度.当刚体的运动受到某种限制,它的自由度将减少.若把刚体的两点固定,它就只能绕通过此两点的连线(转轴)作定轴转动,刚体便只有一个转动自由度.

现在按照上述概念来确定分子的自由度.从分子的结构上来说,有单原子、双原子、三原子和多原子分子.单原子分子(如氦、氖、氩等),可看作自由运动的质点,有三个自由度[图 7.10(a)].双原子分子(如氢、氧、氮、一氧化碳等)中的两个原子是通过键联结起来的[图 7.10(b)].若是把键看作是刚性的(即认为两原子间的距离不会改变),则双原子分子就可看作是两端分别连接一个质点(原子)的直线,因此,需用三个独立坐标(x, y, z)来决定其质心的所在位置,需用两个独立坐标(如 α, β)决定其联线的方位,而两个质点绕其联线为轴的转动是不存在的.这样,双原子分子共有五个自由度:三个平动自由度,两转动自由度.三个或三个以上的原子所组成的分子,如果其中原子之间保持刚性连接,则可将其看作是自由运动的刚体[图 7.10(c)],共有六个自由度.在实际上,双原子或多原子的气体分子并不完全是刚性的,在原子间相互作用力的支配下,分子内部还存在振动,因此还应有振动自由度.

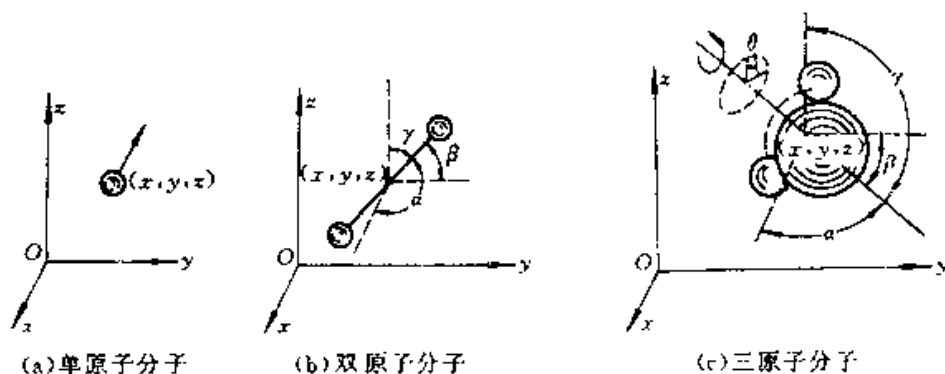


图 7.10 分子运动的自由度

前面所讲的理想气体分子热运动,是把分子视为质点,只研究了分子的平动及相应的能量——平动动能.实际上,分子除单原子分子外,还有双原子、三(多)原子分子.这种结构复杂的分子具有平动、转动及振动的运动形式,在分子的相互碰撞过

程中,各种运动形式都可能被激发而具有相应的能量.

本节将讨论分子热运动的能量所遵循的统计规律,从而分析理想气体的内能.

在常温下,气体分子可视为刚性分子,不考虑分子内部的振动及其相应的能量.为了确定分子的各种运动形式相应的能量的平均值,我们根据第三章所讨论的物体的自由度概念来研究气体分子的自由度——决定分子位置所需要的独立坐标数目.

只要将不同结构的分子和不同类型的物体进行类比,就可决定气体分子的自由度.表 7-2 列出了分子的自由度,供以后研究问题时参考.

表 7-2 分子的自由度

分子的自由度数 分子种类和对应的物体	平动自由度 (t)	转动自由度 (r)	总自由度 $i(=t+r)$
单原子分子——质点	3	0	3
刚性双原子分子——刚体双质点系统	3	2	5
刚性多原子分子——刚体	3	3	6

二、能量按自由度均分原理

研究得知,分子能量是按自由度分配的,先从平动讨论起.由 § 7-3 理想气体的温度公式

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

根据统计性假设, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, 给其两端同乘以 $(\frac{1}{2}m)$ 并与温度公式比较可得

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{1}{2}kT \quad (7-24)$$

上式可理解为,理想气体分子的平均平动能均匀地分配在每一个平动自由度上,即每一个平动自由度都具有大小为 $\frac{1}{2}kT$ 的平均平动动能.

分子的任何一种热运动都机会均等,都不会比另一种热运动占优势,因此上述结论可推广到转动和振动.即在温度为 T 的平衡态下,分子的每一自由度平均地都具有相同的平均动能,其大小为 $\frac{1}{2}kT$, 这称为能量按自由度均分原理.

该定理不仅适用于气体,而且对液体和固体也是正确的,已经得到严格的证明.

如果气体有 i 个自由度, 则气体分子的平均动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{i}{2}kT \quad (7-25)$$

公式中对单原子分子, $i = 3$; 刚性双原子分子, $i = 5$; 刚性多原子分子, $i = 6$.

能量按自由度均分原理是一条统计规律, 是对平衡态下大量分子进行统计平均的结果.

三、理想气体的内能

物质系统内部所包含的总能量叫做物质系统的内能.

气体的内能是指气体内所有分子的动能与势能的总和. 对常温下的理想气体, 由于忽略了分子间的势能和分子内部的振动, 故理想气体的内能就等于所有分子的平动动能和转动动能的总和. 设有分子自由度为 i 的理想气体, 当温度为 T 时, 1 个分子的平均动能为 $\frac{i}{2}kT$, 那么 1 mol 的理想气体的内能为

$$E_0 = N_0 \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}RT$$

对于质量为 M , 摩尔质量为 μ 的理想气体, 其内能为

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT \quad (7-26)$$

常用到的是内能变化, 即

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}R\Delta T \quad (7-27)$$

由式(7-26)可知, 一定量某种理想气体的内能完全决定于它的温度, 而与气体和压强无关. 即是说, 理想气体的内能是温度(也就是状态)的单值函数.

例 7-6 质量为 0.05kg 、温度为 18°C 的氮气(视为理想气体), 盛装在容积为 10^{-2}m^3 的密封绝热容器内, 容器以 $v = 200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率作匀速直线运动. 若容器突然停止, 其定向运动能全部转化为气体分子的热运动动能, 则平衡后氮气的温度和压强各增大多少?

解 依题意和氮气的定向运动动能为

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2$$

氮气分子的热运动动能(即内能)为

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} RT$$

当温度变化 ΔT 时,内能的改变量为

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} R \Delta T$$

因 $E_s = \Delta E$, 即 $\frac{1}{2} M v^2 = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2} R \Delta T$

所以
$$\Delta T = \frac{\mu v^2}{5R} = \frac{28 \times 10^{-3} \times 200^2}{5 \times 8.31} = 27(\text{K})$$

压强增量
$$\Delta P = \frac{M}{\mu} \frac{R \Delta T}{V} = \frac{50 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \frac{8.31 \times 27}{10 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^4 (\text{Pa})$$

§ 7.7 气体分子的平均碰撞频率和平均自由程

在室温下,气体分子的平均速率为每秒数百米.初看起来,在气体中发生的一切过程似乎都应进行得很快.如打开香水瓶盖,只要经过百分之几秒,就可在几米远处闻到香味.实际情况并非如此.这种情况在历史上曾引起一些物理学家对气体动理论的怀疑.克劳修斯首先解决了这个疑团,他指出,气体分子速率虽然很大,但由于分子数密度很大,每个分子在运动过程中都要与其它分子发生频繁碰撞,走过回曲折的路径如图 7.11 所示,因此尽管平均速率很大,单位时间内发生的位移并不大,分子从一处到另一处仍然需要相当长时间.

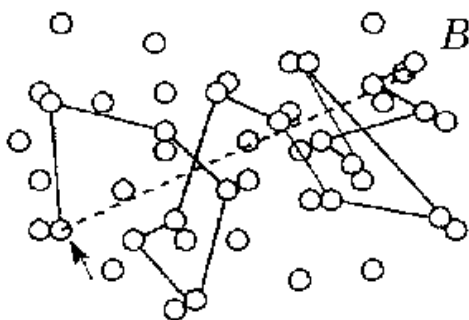


图 7.11 分子碰撞

一、分子作用球

把气体分子视为点状的粒子,所导出的结论与实验结果相当符合,这是因为研究的问题与分子的碰撞没有直接关系.但在考虑与分子碰撞有关的问题时,尽管分子很小却不能认为是数学上的一个几何点,应该有一定的大小.因为如 § 7-1 中曾讨论过的分子间存在着分子力的作用,所谓分子的碰撞,实质上是在分子力的作用下分子间的相互散射过程.当一个分子飞向另一个分子,相互间的距离小于某一数值时,分子间的斥力致使它们改变原来的方向而飞开,这便是分子间的散射.为简化

计,通常把分子视为具有一定体积的弹性小球,称为分子作用球,而把分子间的相互散射过程视为弹性球的碰撞.应该注意分子作用球并不是分子本身的大小,而是代表入射的分子能否被另一个分子散射的范围.

由于两个分子相碰时质心间的最小距离与它们的相对速度有关,因此对于不同分子,其最小距离是不同的,我们把两个分子相碰时质心间最小距离的平均值,称为分子的有效直径,以 d 表示,近似地视为常数,其大小均为 10^{-10}m 的数量级.在图 7.10 中, $d = d' + d''$,一般认为 $d' = d'' = a$,故 $d = 2a$.

在讨论问题时,为方便起见引入分子的有效碰撞(或散射)截面 σ ,即是说入射分子的中心位置如果通过这个 σ 的范围内就会被散射掉. σ 的大小与相互碰撞的两个分子的结构有关,很显然 $\sigma = \pi d^2$.

二、平均碰撞频率 \bar{z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$

前面讲过,分子与分子间不断碰撞,气体内部的热平衡,就是分子相互碰撞的结果.考察一特定分子在任意两次连续碰撞之间所走的路程,时长时短,没规律可循,但对分子总体而言,却遵循着确定的统计规律.为了描述分子相互碰撞的频繁程度,我们引入了两个物理量,一个分子在连续两次和其它分子碰撞之间经过的一段路程,称为分子的自由程,大量分子自由程的平均值,称为分子平均自由程,以 $\bar{\lambda}$ 表示.与自由程相关的是把单位时间内每一个分子与其它分子相碰的平均次数称为平均碰撞频率 \bar{z} .

很显然 $\frac{1}{\bar{z}}$ 表示连续两次碰撞相隔的时间,若以 \bar{v} 表示分子的平均速率,则有

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} \quad (7-28)$$

$\bar{\lambda}$ 和 \bar{z} 的大小与气体性质和状态有关.下面我们来讲影响 $\bar{\lambda}$ 和 \bar{z} 的因素.

首先在众多分子中,追踪一个分子,如分子 A.假设其它分子都静止不动,只有分子 A 以相对平均速率 \bar{u} 在分子间穿梭运动,不断与其它分子发生碰撞,其球心的轨迹是一条复杂的折线,并且假定分子是直径均为 d 的球,以分子 A 球心的轨迹为轴, d 为半径作一曲折的圆柱体(图 7.12),其截面积 $\sigma = \pi d^2$ 即为有效碰撞截面.

在时间 t 内,分子 A 走过 $\bar{u}t$ 的路程,即折线的总长,若将曲折圆柱拉长就得到长为 $\bar{u} \cdot t$,截面积为 σ 的直圆柱体.

由图 7.12 可知,凡是球心离开折线的距离小于 d 的其它分子都将和分子 A 发生

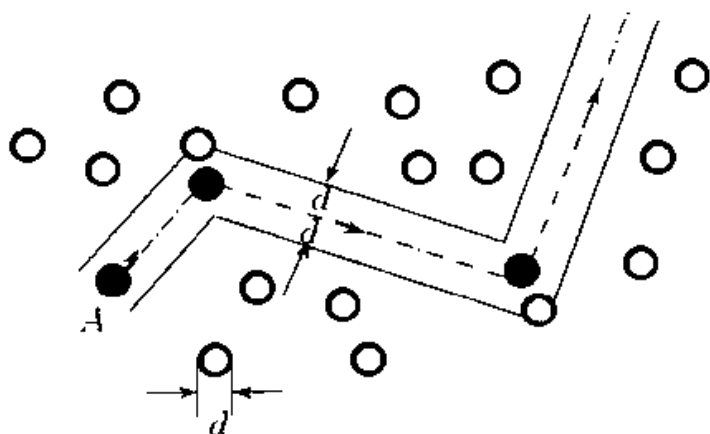


图 7.12 分子碰撞次数的计算

碰撞. 设距离小于 d 的分子数为 N , 则 N 就等于时间 t 内的碰撞次数, 依平均碰撞频率的定义得

$$\bar{z} = \frac{N}{t}$$

问题变为只须计算图 7.12 所示圆柱体积中有多少个分子球心即可. 分子数密度为 n , 而圆柱体截面积为 σ , 则圆柱体的分子数 $N = n \cdot \pi d^2 \bar{u} l$ 所以

$$\bar{z} = \pi d^2 \bar{u} n$$

推导过程假定只有分子 A 在运动不十分合理, 应该考虑所有分子的运动. 利用麦克斯韦速率分布律可以证明, 分子的平均相对速率 $\bar{u} = \sqrt{2} \bar{v}$, 其中 \bar{v} 为气体分子的平均速率, 由此可得平均碰撞频率

$$\bar{z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n \quad (7-29)$$

由式(7-28)得到平均自由程的表达式为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (7-30)$$

若分子数密度愈大, 分子有效直径愈大, 分子的碰撞次数就愈多, 平均自由程就愈短.

例 7-7 若氮分子的有效直径为 $2.04 \times 10^{-10} \text{ m}$, 问在温度为 600 K 、压强为 133.32 Pa , 氮分子的平均自由程和平均碰撞频率.

解 由

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

及

$$P = nkT$$

可得平均自由程和压强的关系为

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

代入数据得

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 600}{1.41 \times 3.142 \times (2.04 \times 10^{-10})^2 \times 133.32} \\ &= 3.4 \times 10^{-1} (\text{m})\end{aligned}$$

又由

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$$

而

$$\begin{aligned}\bar{v} &= 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} = 1.60 \sqrt{\frac{8.31 \times 600}{20.2 \times 10^{-2}}} \\ &= 7.95 \times 10^2 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})\end{aligned}$$

故

$$\bar{z} = \frac{7.95 \times 10^2}{3.4 \times 10^{-1}} = 2.34 \times 10^6 (\text{s}^{-1})$$

最后需要指出的是分子的线度是通过晶体的研究来确定的,粒子碰撞的研究可做为确定分子有效直径的方法.

思考题

7-1 气体在平衡态时有何特征?当气体处于平衡状态时还有分子热运动吗?

7-2 用气体动理论的观点说明:

(1) 当气体温度升高时,只要适当地增大容器的容积,就可使气体的压强保持不变.

(2) 气体在平衡态下,则 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$, $\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$

7-3 保持气体的压强不变,使其温度升高1倍,则每秒与器壁单位面积碰撞的分子数如何变化?

7-4 一个用绝热材料做成的氧气瓶中盛有氧气,在高速运输的过程中突然停止,问瓶中氧气的压强和温度会有什么变化?

7-5 试说明下列各量的物理意义:

(1) $f(v)dv$; (2) $Nf(v)dv$; (3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$; (4) $\int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v)dv$

7-6 麦克斯韦速率分布曲线如图 7.13. 则

- (1) 曲线反映了分子数随速率的变化关系;
- (2) $f(v_p)$ 对应于速率最大的分子数;
- (3) 曲线与横轴包围的面积代表气体分子总数;
- (4) $f(v_1)$ 代表分子处于 v_1 附近单位速率区间内的百分数.

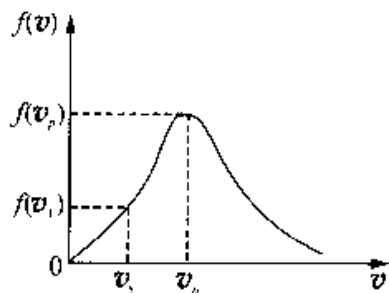


图 7.13

以上说法哪种正确?

7-7 是否可以这样说:“具有某一速率的分子有多少个?”

7-8 指出下列各式所表示的物理意义:

- (1) $\frac{1}{2}RT$; (2) $\frac{3}{2}RT$; (3) $\frac{i}{2}RT$; (4) $\frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT$.

7-9 容器内贮有一定量的气体,保持容积不变,使气体的温度升高,则分子的平均碰撞次数和平均自由程各怎样变化?

习 题

7-1 若理想气体的体积为 V , 压强为 p , 温度为 T , 一个分子的质量为 m , k 为玻耳兹曼常量, R 为摩尔气体常量, 则该理想气体的分子数为: ()

- | | |
|--------------|--------------|
| A. pV/m | B. $pV/(kT)$ |
| C. $pV/(RT)$ | D. $pV/(mT)$ |

7-2 一定量的理想气体贮存于某一容器中, 温度为 T , 气体分子的质量为 m . 根据理想气体分子模型和统计假设, 分子速度在 x 方向的分量的平均值为 ()

- | | |
|--|---|
| A. $\bar{V}_x = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ | B. $\bar{V}_x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ |
| C. $\bar{V}_x = \sqrt{\frac{8kT}{3\pi m}}$ | D. $\bar{V}_x = 0$ |

7-3 两瓶不同种类的理想气体, 它们的温度和压强都相同, 但体积不同, 则单位体积内的气体分子数为 n , 单位体积内的气体分子的总平动动能 (E_k/V), 单位体积内的气体质量 ρ , 分别有如下关系: ()

A. n 不同, (E_k/V) 不同, ρ 不同.

B. n 不同, (E_k/V) 不同, ρ 相同.

C. n 相同, (E_k/V) 相同, ρ 不同.

D. n 相同, (E_k/V) 相同, ρ 相同.

7-4 一容器内装有 N_1 个单原子理想气体分子和 N_2 个刚体双原子理想气体分子, 当该系统处在温度为 T 的平衡态时, 其内能为 ()

A. $(N_1 + N_2)(\frac{3}{2}kT + \frac{5}{2}kT)$

B. $\frac{1}{2}(N_1 + N_2)(\frac{3}{2}kT + \frac{5}{2}kT)$

C. $N_1 \frac{3}{2}kT + N_2 \frac{5}{2}kT$

D. $N_1 \frac{5}{2}kT + N_2 \frac{3}{2}kT$

7-5 在容积 $V = 4 \times 10^{-3} \text{m}^3$ 的容器中, 装有压强 $P = 5 \times 10^5 \text{Pa}$ 的理想气体, 则容器中气体分子的平动动能总和为 ()

A. 2J

B. 3J

C. 5J

D. 9J

7-6 玻尔兹曼分布律表明: 在某一温度的平衡态,

(1) 分布在某一区间(坐标区间和速度区间)的分子数, 与该区间粒子的能量成正比.

(2) 在同样大小的各区间(坐标区间和速度区间)中, 能量较大的分子数较少; 能量较小的分子数较多.

(3) 在大小相等的各区间(坐标区间和速度区间)中比较, 分子总是处于低能态的几率大些.

(4) 分布在某一坐标区间内、具有各种速度的分子总数只与坐标区间的间隔成正比, 与粒子能量无关.

以上四种说法中, ()

A. 只有(1)、(2)是正确的.

B. 只有(2)、(3)是正确的.

C. 只有(1)、(2)、(3)是正确的.

D. 全部是正确的.

7-7 假定氧气的热力学温度提高一倍, 氧分子全部离解为氢原子, 则氧原子的平均速率是氧分子平均速率的 ()

A. 4 倍

B. 2 倍

C. $\sqrt{2}$ 倍

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍

7-8 麦克斯韦速率分布曲线如图 7.14 所示, 图中 A、B 两部分面积相等, 则该图表示 ()

A. V_0 为最可几速率.

B. V_0 为平均速率.

C. V_0 为方均根速率.

D. 速率大于和小于 V_0 的分子数各占一半

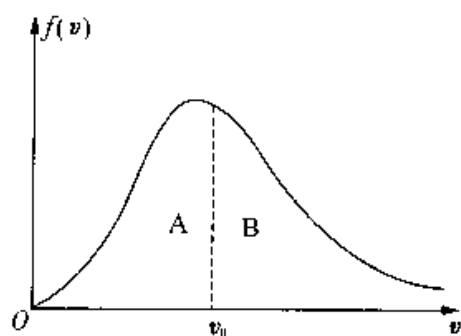


图 7.14

7-9 若 $f(v)$ 为气体分子速率分布函数, N 为分子总数, m 为分子质量, 则 $\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2}mv^2 Nf(v)dv$ 的物

理意义是:

()

A. 速率为 v_2 的各分子的总平动动能与速率为 v_1 的各分子的总平动动能之差.

B. 速率为 v_2 的各分子的总平动动能与速率为 v_1 的各分子的总平动动能之和.

C. 速率处在速率间隔 $v_1 - v_2$ 之内的分子平均平动动能.

D. 速率处在速率间隔 $v_1 - v_2$ 之内的分子平动动能之和.

7-10 一定量的理想气体, 在容积不变的条件下, 当温度降低时, 分子的平均碰撞次数 \bar{Z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是 ()

A. \bar{Z} 减小, 但 $\bar{\lambda}$ 不变.

B. \bar{Z} 不变, 但 $\bar{\lambda}$ 减小.

C. \bar{Z} 和 $\bar{\lambda}$ 都减小.

D. \bar{Z} 和 $\bar{\lambda}$ 都不变.

7-11 在推导理想气体压强公式中, 体现统计意义的两条假设是

(1) _____;

(2) _____;

7-12 某理想气体在温度为 27°C 和压强为 $1.0 \times 10^{-2} \text{ atm}$ 情况下, 密度为 11.3 g/m^3 , 则这气体的摩尔质量 $M_{\text{mol}} =$ _____.

7-13 1 大气压、 27°C 时, 一立方米体积中理想气体的分子数 $n =$ _____, 分子热运动的平均平动动能 $\bar{\epsilon} =$ _____. (玻耳兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$)

7-14 若某容器内温度为 300 K 的二氧化碳气体(视为刚性分子理想气体)的内能为 $3.74 \times 10^3 \text{ J}$, 则该容器内气体分子总数为 _____.

(玻耳兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$)

7-15 分子物理学是研究 _____ 的学科. 它应用的基本方法是 _____ 方法.

7-16 重力场中大气压强随高度 h 的变化规律为

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{mol}}gh}{RT}\right)$$

当大气压强 p 减至为地面压强 p_0 的 75% 时, 该处距离地面的高度 $h =$ _____.

(设空气的温度为 0°C , 摩尔气体常量 $R = 8.31\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 空气的摩尔质量为 $29 \times 10^{-3}\text{kg/mol}$, 符号 $\exp\{a\}$, 即 e^a).

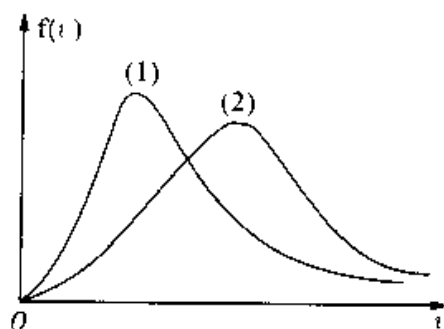


图 7.15

7-17 现有两条气体分子速率分布曲线(1)和(2), 如图 7.15 所示, 若两条曲线分别表示同一种气体处于不同的温度下的速率分布, 则曲线 _____ 表示气体的温度较高.

7-18 当理想气体处于平衡态时, 气体分子速率分布函数为 $f(v)$, 则分子速率处于最可几率 v_p 至 ∞ 范围内的几率 $\Delta N/N =$ _____.

7-19 一定量的某种理想气体, 先经过等容过程使其热力学温度升高为原来的 2 倍; 再经过等压过程使其体积膨胀为原来的 2 倍, 则分子的平均自由程变为原来的 _____ 倍.

7-20 一定量的某种理想气体, 先经过等容过程使其热力学温度升高为原来的 4 倍; 再经过等温过程使其体积膨胀为原来的 2 倍, 则分子的平均碰撞频率为原来的 _____ 倍.

7-21 有 $2 \times 10^{-3}\text{m}^3$ 刚性双原子分子理想气体, 其内能为 $6.75 \times 10^3\text{J}$.

(1) 试求气体的压强;

(2) 设分子总数为 5.4×10^{22} 个, 求分子的平均平动动能及气体的温度.

(玻耳兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)

7-22 容积为 20.0l 的瓶子以速率 $v = 200\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 匀速运动, 瓶子中充有质量为 100g 的氮气. 设瓶子突然停止, 且气体分子全部定向运动的动能都变为热运动动能, 瓶子与外界没有热量交换. 求热平衡后氮气的温度、压强、内能及氮气分子的平均动能各增加多少?(摩尔气体常量 $R = 8.31\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 玻耳兹曼常量 $k = 1.38 \times 10^{-23}\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$).

7-23 当氢气和氮气的压强、体积和温度都相等时, 求它们的质量比 $\frac{M(\text{H}_2)}{M(\text{He})}$ 和内能比 $\frac{E(\text{H}_2)}{E(\text{He})}$ (将氢气视为刚性双原子分子气体).

7-24 气体的摩尔质量可用下述方法测量:在容积为 V 的容器内装入待测量的气体,测出其压强 P_1 和温度 T ,并称出容器连同气体的质量 M_1 ;然后放掉一部分气体,这时气体的压强降至 P_2 ,温度仍不变,而称出容器连同气体的质量 M_2 . 求该气体的摩尔质量.

7-25 目前所能获得的极限真空度约为 1.33×10^{-11} Pa 的数量级,试问在此真空下 10^{-3} m^3 体积内有多少个空气分子?(假定空气温度为 27°C).

7-26 试证道尔顿分压定律:混合气体的总压强等于各种气体单独充满容器时产生的压强之和,即

$$P = P_1 + P_2 + \dots$$

7-27 在温度为 17°C 时,一气球中氢气的压强为 2.02×10^5 Pa,求该气球内氢气的密度和分子数密度.

7-28 温度为 27°C 时,1 mol 氦气、氢气和氧气各有多少内能? 10^{-3} kg 这些气体各有多少内能?

7-29 计算在 127°C 时氧分子的最概然速率、平均速率和方均根速率.

7-30 某个真空管的真空度为 1.33×10^{-3} Pa,设空气分子的有效直径为 3×10^{-10} m,求温度为 27°C 时单位体积内的空气分子数、分子的平均自由程和平均碰撞频率.

第 8 章 热力学第一定律及其应用

热力学是以实验事实为基础,从能量转换观点出发,研究物质状态变化过程中,热功转换、热量传递等有关物理量之间所遵循的宏观规律,不涉及物质的微观结构,是一种宏观理论.而上一章的气体动理论是微观理论,它们是从不同的角度研究物质热运动规律的,两者相辅相成.

§ 8.1 热力学第一定律

一、准静态过程

在研究热力学问题时,一般把所研究的宏观物体对象称为热力学系统,简称系统,而把与热力学系统有相互作用的周围环境称为系统的外界.

当系统与外界有能量交换时,其状态将随时间而变化,这时系统将从一个状态而变化到另一个状态,称系统经历了一个热力学过程.由于系统经历的中间状态不同,热力学过程可分为准静态过程和非准静态过程.

准静态过程是指一个系统从开始时的某一平衡状态经过一系列状态变化后而到达另一平衡状态,若任一中间状态都无限接近于平衡,可近似当做平衡态,那么这个状态变化过程称作准静态过程.显然,准静态过程是一种理想过程.实际发生的过程,往往始末状态之间所经历的中间状态不可能都是平衡态,而是存在着非平衡态,称为**非准静态过程**.

我们结合图 8.1 来说明准静态过程和非准静态过程的关系.在带有活塞的气缸内贮存有一定量的气体,活塞可沿容器壁滑动.开始时,气体处于平衡状态,其状态参量为 p_1, V_1, T_1 ,推进活塞压缩气缸内的气体时,气体的状态参量将发生变化,在任一时刻,气体各部分的温度压强及密度并不完全相同.显然靠近活塞处的气体密度较大,压强也较大,温度较高,即气体处于非平衡状态,经过一定时间后,气体中各处密度、压强、温度才能处处相等,达到平衡状态.如果压缩过程进行的非常缓慢,各

时刻系统的状态就可看作近似地处于平衡态. 准静态过程就是这种足够缓慢过程的理想极限. 在处理实际问题时, 除了一些进行极快的过程(如爆炸等过程)外, 大多数情况下都可以把实际过程按准静态过程处理.

对于准静态过程, 可以用系统的状态图描述, 如 $p-V$ 图, $p-T$ 图, $V-T$ 图等. 例如图 8.2 的 $p-V$ 曲线图, 曲线上任一点就表示系统某时刻的一个平衡态, 一条曲线就表示由一系列平衡态组成的准静态过程. 图示为由初始平衡态 $I(p_1, V_1, T_1)$ 变化到末平衡态 $II(p_2, V_2, T_2)$ 的某一准静态过程的过程曲线.

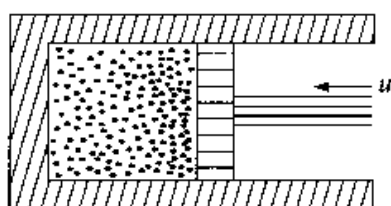


图 8.1 压缩气体时气缸内各处密度不均匀

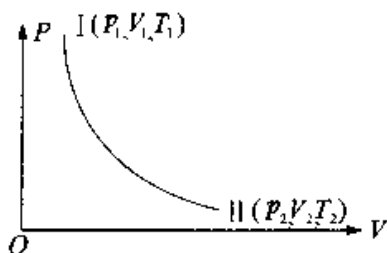


图 8.2 $P-V$ 曲线图

对于非准静态过程, 因非平衡态不能用一定的状态参量描述, 因此也就不能用状态图来表示.

二、准静态过程的功

做功是能量传递和转换的一种方式, 是系统状态发生变化的原因之一. 我们讨论准静态过程中的功.

如图 8.3 所示, 设想一定量的气体在气缸内进行无摩擦的准静态膨胀. 活塞面积为 S , 气体某一时刻压强为 p , 作用于活塞的压力为 $F = pS$, 当气体推动活塞向外缓慢移动一微小距离 dL 时, 气体对外界所作的微功为

$$\delta A = FdL = pSdL = p dV \quad (8-1)$$

dV 为气体的体积变化量.

显然, 当气体膨胀时, $dV > 0$, 系统对外界做功; 当气体被压缩时, $dV < 0$, 系统作负功, 或者说外界对系统做功.

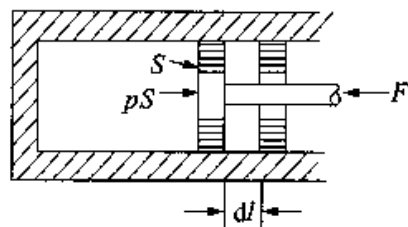


图 8.3

当系统经历一个有限的准静态过程, 体积由 V_1 变化到 V_2 时, 系统对外界所作功则为

$$A = \int dA = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (8-2)$$

如果知道准静态过程中压强与体积的关系式, 就可由 (8-2) 式求出功的大小.

因系统的任一准静态过程都可在 $p-V$ 图中用过程曲线来表示, 由积分的意义可知, 系统所作的功等于过程曲线下的面积大小, 如图 8.4 所示. 由于从状态 I 到状态 II 可以有无穷多条曲线 (准静态过程), 系统的功也就有无穷多个, 所以系统所作的功不仅与系统始末状态有关, 而且与路径有关, 功不是状态的单值函数, 即功不是状态量, 而是一个过程量, 这就是为什么在前面我们用 dA 表示微功而不用全微分式 dA 表示的原因.

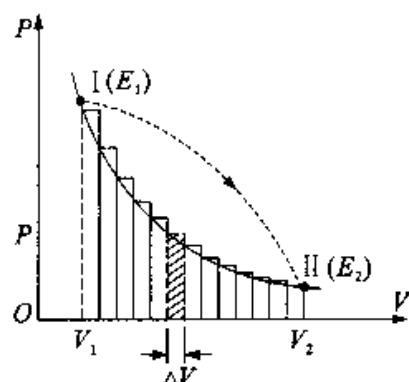


图 8.4

三、准静态过程的热量

系统和外界之间的热传递也会改变系统的状态, 我们把系统与外界之间传递的能量叫做热量, 用 Q 表示.

应当注意的是这种热传递可使系统的温度发生变化, 也可能维持系统的温度不变 (例如等温过程).

当热传递引起系统本身温度变化时, 可用热容来描述温度变化和热传递的关系.

一质量为 M 的物体, 在某过程中吸收 (或放出) 热量 dQ , 其温度升高 (或降低) dT 时, 该物体在这个过程中的热容定义为

$$C_r = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_r \quad (8-3)$$

热容不仅与物体的性质有关, 还与所经历过程有关, 它和功一样是个过程量.

把单位质量物体的热容称为该物体的比热容

$$c_r = \frac{C_r}{M} = \left(\frac{dQ}{M dT} \right)_r \quad (8-4)$$

如果物体的温度从初态 T_1 变化到末态 T_2 时, 则其吸收 (或放出) 的热量为

$$Q_r = M \int_{T_1}^{T_2} c_r dT \quad (8-5)$$

一般情况下 c_v 是温度的函数, 只有在温度变化范围不太大, 可视为常量, 此时

$$Q_v = Mc_v(T_2 - T_1) \quad (8-6)$$

显然当 $T_2 > T_1$ 时 $Q_v > 0$ 系统吸热

$T_2 < T_1$ 时 $Q_v < 0$ 系统放热

四、理想气体的内能

前面指出, 做功和传递热量都可以使系统的状态发生变化, 其中做功是通过宏观的有规则运动(如机械运动, 电流等)来实现的, 可称其为宏观功. 但传递热量却不同, 这种交换是通过分子的无规则热运动来完成的, 即是系统外物体的分子无规则热运动与系统内分子的无规则热运动之间的相互转换. 当系统内外两种分子不断碰撞时, 碰撞中两种分子间的作用力会使分子产生微观位移, 因此存在着微观功, 结果表现为外界和系统之间有内能的传递, 即热量的传递是通过微观功来实现的. 显然, 这种内能的传递只有在外界分子和系统分子的平均动能不相同才能实现, 也就是从宏观上来看, 这种内能的传递需要外界和系统温度不同.

实验表明, 对于系统给定的初始状态和末状态, 传递热量和做功的总和与系统经历的过程无关而具有确定值. 前面已经指出, 无论做功和传热, 都可使系统的能量增加, 因此, 热力学系统在一定状态应具有一定的能量, 这个能量仅是系统状态的单值函数, 是个状态量, 称做内能. 根据气体动理论的观点, 在不考虑分子内部结构情况下, 系统的内能就是系统中所有的分子热运动的能量和分子与分子间相互作用势能的总和. 对于理想气体的内能仅是温度的函数, 即

$$E = E(T).$$

在历史上, 热量的单位曾用卡表示, 而功的单位为焦耳, 英国物理学家焦耳通过实验证明了功和热量在改变系统能量方面是相当的, 功和卡的换算关系为

$$1 \text{ 卡} = 4.18 \text{ 焦耳} \quad 1 \text{ 焦耳} = 0.24 \text{ 卡}$$

在国际单位制中功和热量的单位都用焦耳.

五、热力学第一定律

一般情况下, 在一个热力学过程中, 做功和传递热量往往同时存在. 若开始时系统处于平衡状态 I, 内能为 E_1 , 当外界对其做功为 A' 和系统从外界吸热 Q 后, 系统到达平衡状态 II, 其内能为 E_2 , 则有以下实验结论

$$\Delta E = E_2 - E_1 = Q + A' \quad (8-7a)$$

即系统从外界吸收的热量和外界对系统做功之和等于系统内能的增量, 这一结论叫做热力学第一定律。

如果以 A 表示该过程中系统对外界作的功, 则由于有 $A = -A'$, 故上式可写成

$$Q = \Delta E + A \quad (8-7b)$$

这是热力学第一定律的另一种表达形式, 它表明, 系统从外界吸收的热量, 一部分使系统的内能增加, 另一部分用于系统对外界做功。

热力学第一定律是能量守恒定律在热力学中的具体体现。

对微小的状态变化过程, 热力学第一定律可写成

$$dQ = dE + dA \quad (8-7c)$$

从第一定律知, 功和热之间的转换不能直接进行, 而是通过物质系统来完成的。外界向系统传递热量使系统的内能增加, 再由系统的内能减少而对外做功; 或者外界对系统做功, 使系统的内能增加, 再由内能的减少, 系统向外界放出热量。因此, 通常所说的热转换为功或功转换为热只是不严格的通俗用语。

在热力学第一定律被发现以前, 人们曾幻想制造一种机器, 它既不需要消耗系统的内能, 又不需要外界向它传递热量, 即不消耗任何能量而能不断地对外做功, 这种机器叫做第一类永动机。显然这种机器是违反热力学第一定律的, 当然这种机器是不可能制造出来的, 所以热力学第一定律还可叙述为: 第一类永动机不可能实现。

例 8-1 一系统由图 8.5 所示的 a 状态沿 acb 到达 b 状态, 有 345 焦耳的热量传入系统, 而系统对外做功为 125 焦耳。

(1) 若沿 adb 过程时, 系统对外做功为 40 焦耳, 问有多少热量传入系统?

(2) 当系统由 b 状态沿曲线 ba 返回到 a 状态时, 外界对系统做功为 80 焦耳, 试问系统是吸热, 还是放热? 传递的热量为多少?

(3) 若系统 bd 间的内能变化量为 $\Delta E_{bd} = 75$ 焦耳, 试问沿 ad 及 ab 各吸收多少热量?

解 (1) 根据热力学第一定律

$$Q = \Delta E + A$$

由已知条件, 在 abc 过程中, 得出 b, a 两状态的内能变化量为

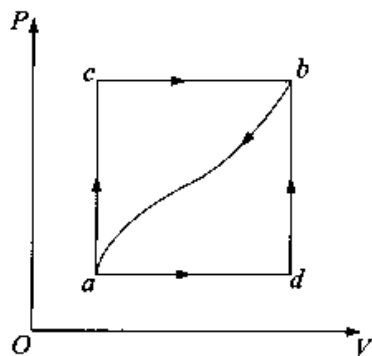


图 8.5

$$\Delta E_{ba} = Q_{adb} - A_{acb} = 345 - 125 = 220(\text{焦耳})$$

因为 b, a 两状态内能的变化量与过程无关, 故在 adb 过程中, 传入系统的热量为

$$Q_{adb} = \Delta E_{ba} + A_{adb} = 220 + 40 = 260(\text{焦耳})$$

(2) 从 b 沿曲线到 a 的过程中, 仍根据热力学第一定律有

$$\begin{aligned} Q_{db} &= \Delta E_{db} + A_{db} = -\Delta E_{bd} + A_{db} \\ &= -220 + (-80) = -300(\text{焦耳}) \end{aligned}$$

负号表示系统放热.

(3) 因为 db 为等容过程, 故 $A_{db} = 0$, 在 db 过程中, 吸收的热量为

$$Q_{db} = \Delta E_{bd} + A_{db} = \Delta E_{bd} = 75(\text{焦耳})$$

因为 $Q_{adb} = 260(\text{焦耳})$, 故在 ad 过程中吸热为

$$Q_{ad} = Q_{adb} - Q_{db} = 260 - 75 = 185(\text{焦耳}).$$

从以上分析可看出, 求解此类题目的关键是利用内能是状态的单值函数性质.

§ 8.2 理想气体的等值过程

在本节中, 我们将利用热力学第一定律来计算三个等值过程(等压、等温、等体)中的功、热和内能的改变量及它们之间的关系.

一、等体过程

设有质量为 M , 摩尔质量为 μ 的理想气体, 做体积 $V = \text{常量}$ (即 $dV = 0$) 的升温准静态过程, 由初始温度 (T_1) 升高到末态温度 (T_2), 计算该过程中的热量变化 Q , 内能增量 ΔE 及对外界做功 A .

这种准静态等体过程在 $p-V$ 图上是一条与 p 轴平行的直线, 称为等体线, 如图 8.6, 箭头表示过程进行的方向.

等体过程的特征是 $V = \text{恒量}$, 即 $dV = 0$, 故

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \alpha V = 0 \quad (8-8)$$

即等体过程中系统不作功.

内能与过程无关, 则内能增量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) \quad (8-9)$$

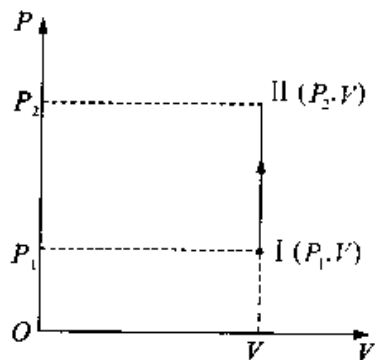


图 8.6 等体过程

根据热力学第一定律可得系统从外界吸收的热量为

$$Q_v = \Delta E + A = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) \quad (8-10)$$

即等体过程中, 气体吸收的热量全部用来增加气体的内能.

热量还可采用量热法来表示, 我们定义理想气体的等体摩尔热容. 设有 1mol 理想气体在等体过程中, 由温度 T 升至 $T + dT$, 所吸收的热量为 dQ_v , 则该种气体的等体摩尔热容为

$$C_{v,m} = \frac{dQ_v}{dT} \quad (8-11)$$

其单位为焦耳每摩尔开尔文, 符号为 $J \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{则} \quad C_{v,m} &= \frac{dQ_v}{dT} = \left(\frac{dE}{dT} \right)_v = \frac{\frac{i}{2} R dT}{dT} \\ &= \frac{i}{2} R \end{aligned} \quad (8-12)$$

若已知 $C_{v,m}$, 则对质量为 M 的理想气体在等体过程中, 温度由 T_1 变为 T_2 时, 吸收的热量为

$$Q_v = \frac{M}{\mu} C_{v,m} (T_2 - T_1) = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) \quad (8-13)$$

(8-13) 式和(8-10) 式结果相同.

对于一个微小等体过程有内能增加

$$dE = dQ_v = \frac{M}{\mu} C_{v,m} dT \quad (8-14)$$

因此, 对等体摩尔热容给定的一定量理想气体, 其内能增量仅与温度的增量有关, 与状态的变化过程无关, 基于这个原因, 我们可利用(8-9) 和(8-14) 式来计算任何准静态过程理想气体内能的变化.

二、等压过程

设有质量为 M , 摩尔质量为 μ 的理想气体, 做压强 P 保持不变的等压膨胀过程, 计算该过程中的热量 Q , 内能增量 ΔE 及对外做功 A .

这种准静态的等压过程在 $p-V$ 图上是一条与 V 轴平行的直线, 称为等压线如图 8.7.

等压过程特征 $p = \text{恒量}$, 系统对外界做功为

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{V_1}^{V_2} P dV = P \int_{V_1}^{V_2} dV \\
 &= P(V_2 - V_1)
 \end{aligned}
 \tag{8-15}$$

由理想气体状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu}RT$$

(8-15) 式还可写成

$$A = \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1) \tag{8-16}$$

在 $p-V$ 图上, 功可用等压线下的面积表示.

在等 P 压过程中, 内能的增量仍为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$$

由热力学第一定律可得外界向系统传递的热量为

$$\begin{aligned}
 Q_p &= \Delta E + A = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) + \frac{M}{\mu} R(T_2 - T_1) \\
 &= \frac{M}{\mu} \left(\frac{i}{2} R + R \right) (T_2 - T_1)
 \end{aligned}
 \tag{8-17}$$

即理想气体在等压膨胀过程中吸收的热量一部分用来增加系统的内能, 一部分转换为对外所作的功.

对于微小过程有

$$dQ_p = \frac{M}{\mu} \left(\frac{i}{2} R + R \right) dT \tag{8-18}$$

则等压摩尔热容 $C_{p,m}$ 为

$$\begin{aligned}
 C_{p,m} &= \frac{dQ_p}{dT} = \frac{\left(\frac{i}{2} R + R \right) dT}{dT} = \frac{i}{2} R + R \\
 &= C_{v,m} + R
 \end{aligned}$$

故有

$$C_{p,m} - C_{v,m} = R \tag{8-19}$$

称为迈耶公式.

上式说明理想气体的等压摩尔热容与等体摩尔热容之差为摩尔气体常量 $R \approx 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, 也说是说, 在等压过程中, 1 mol 理想气体温度升高 1 K 时, 要比其

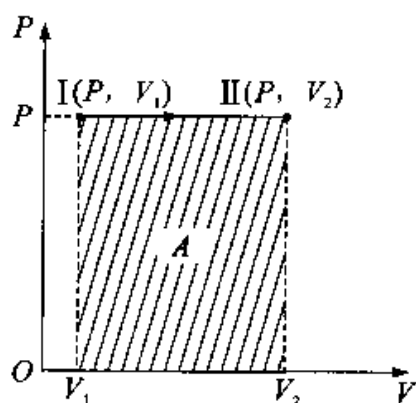


图 8.7 等压过程

等体过程多吸收 8.13 焦耳的热量以用于对外做功. 这是因为无论什么过程, 温度变化相同时, 内能增量相等, 而等体过程不对外做功.

虽然单原子和双原子及多原子理想气体的 $C_{p,m}$ 和 $C_{v,m}$ 不同, 但其差 $C_{p,m} - C_{v,m}$ 等基本相同, 都近似等于 R .

在常温及压强较低时, $C_{p,m}$ 和 $C_{v,m}$ 都只与分子自由度有关, 与气体的温度无关.

$$\text{单原子分子气体} \quad C_{v,m} = \frac{3}{2}R \quad C_{p,m} = \frac{5}{2}R$$

$$\text{刚性双原子分子气体} \quad C_{v,m} = \frac{5}{2}R \quad C_{p,m} = \frac{7}{2}R$$

$$\text{刚性多原子分子气体} \quad C_{v,m} = 3R \quad C_{p,m} = 4R$$

在已知 $C_{p,m}$ 时, 由(8-17)式可知

$$Q_p = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1) \quad (8-20)$$

在实际应用中, 常用到 $C_{p,m}$ 与 $C_{v,m}$ 的比值, 称为摩尔热容比即

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{C_{v,m} + R}{C_{v,m}} \\ &= 1 + \frac{R}{C_{v,m}} = \frac{i+2}{i} \end{aligned} \quad (8-21)$$

三、等温过程

对于质量为 M , 摩尔质量为 μ 理想气体系统, 当温度(T) 保持不变时, 由初始体积 V_1 膨胀到体积 V_2 , 计算该等温过程中的热量 Q , 内能增量 ΔE 及对外做功 A .

等温过程的特征是 $T = \text{恒量}$, 根据等温过程 $PV = \text{恒量}$, 故在 $p-V$ 图上的过程曲线(等温线)是等轴双曲线的一支如图 8.8.

由于理想气体的内能只与其温度有关, 因此在等温过程中内能保持不变.

$$\text{由热力学第一定律有, } Q_T = A_T \quad (8-22)$$

$$\text{或} \quad dQ_T = dA_T = p dV \quad (8-23)$$

$$\text{故} \quad Q_T = A_T = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

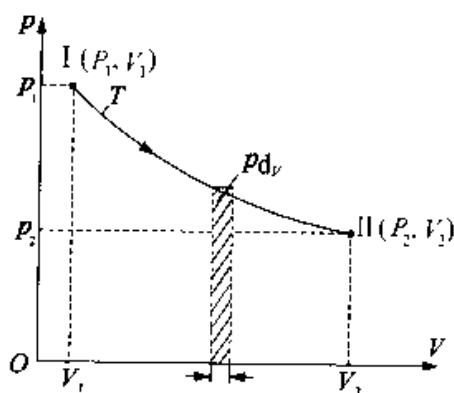


图 8.8 等温过程气体作的功

由理想气体状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$, 上式可写

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} \frac{M}{\mu}RT \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu}RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu}RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (8-24)$$

又因等温过程的过程方程 $p_1V_1 = p_2V_2$ 则上式又可写成

$$A_T = \frac{M}{\mu}RT \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (8-25)$$

即
$$Q_T = A_T = \frac{M}{\mu}RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{\mu}RT \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (8-26)$$

因此, 在等温过程中, 理想气体膨胀所吸收热量全部用来对外做功; 当气体被压缩时 ($V_2 < V_1$) 外界对气体所作的功, 全部以热量形式由系统传递给外界.

应注意, 在等温过程中, 无法定义等温摩尔热容. 因等温过程 $\frac{dQ}{dT} \rightarrow \infty$ 无意义. 故对于等温过程不能用量热法计算热量.

§ 8.3 绝热过程

在系统的状态发生变化的过程中, 如果系统与外界之间没有热量的传递, 这种过程叫做绝热过程. 绝热过程是热力学中一个十分重要的过程. 实际上, 真正的绝热过程是没有的, 但有些过程, 虽然系统与外界有热量传递, 但所传递的热量很小, 可以忽略不计, 这种过程就可以近似地作为绝热过程.

一、绝热过程方程

对于质量为 M , 摩尔质量为 μ 的理想气体系统状态发生变化过程中, 若系统与外界没有热量的交换, 则该过程为绝热过程. 绝热过程的特征为 $Q = 0$ 或 $dQ = 0$. 首先我们来导出绝热过程方程.

由热力学第一定律

$$dQ = dE + pdV$$

因

$$dQ = 0$$

故

$$dE = -pdV$$

由于理想气体的内能仅是温度的函数, 故

$$\frac{M}{\mu} C_{V,m} dT = -pdV \quad (8-27)$$

对于理想气体状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 取全微分有

$$pdV + Vdp = \frac{M}{\mu}RdT \quad (8-28)$$

从(8-27)和(8-28)式中消去 dT 有

$$(C_{V,m} + R)pdV + C_{V,m}Vdp = 0$$

又因 $C_{V,m} + R = C_{p,m}$, $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$ 则上式可写为

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

积分有

$$\ln p + \gamma \ln V = C$$

或

$$pV^\gamma = C_1 \quad (8-29)$$

式中 C, C_1 为常数, (8-29) 式叫泊松公式. 利用理想气体状态方程, 还可以得到

$$TV^{\gamma-1} = C_2 \quad (8-30)$$

$$p^{\gamma-1}T^\gamma = C_3 \quad (8-31)$$

式中 C_2, C_3 都是常数. 因此, 理想气体除满足状态方程外, 在准静态绝热过程中, 各状态参量还需满足(8-29)式、(8-30)式及(8-31)式, 此三式称做绝热过程的过程方程.

图(8-9)为绝热过程的 $p-V$ 图, 绝热线也是双曲线的一支.

若理想气体状态 I (p_1, V_1, T_1) 变化到状态 II (p_2, V_2, T_2), 系统内能的增量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) \\ &= \frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1) \quad (8-32) \end{aligned}$$

绝热过程中的功利用热力学第一定律得

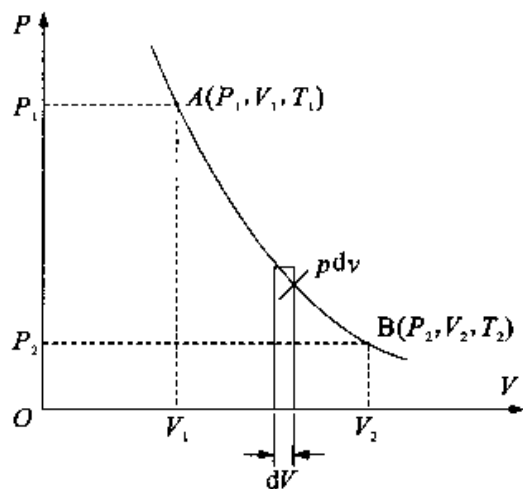


图 8.9

$$A = -\Delta E = -\frac{M}{\mu}C_{v,m}(T_2 - T_1) \quad (8-33)$$

从上式可看出,如果 $T_1 > T_2$, 则 $A > 0$, 气体绝热膨胀系统对外作正功; 如 $T_1 < T_2$, $A < 0$, 气体被绝热压缩外界对系统作正功. 气体在被绝热压缩时, 温度升高, 外界对气体作的功等于系统内能的增量. 气体绝热膨胀时, 温度降低, 内能的减少全部用于对外作功. 例如在实际生活中, 用打气筒给轮胎打气时, 筒壁会发热; 当压缩气体从气筒喷嘴中急速喷出时, 气体绝热膨胀, 气体变冷, 甚至液化.

我们还可用功的定义求绝热过程的功.

由绝热过程方程 $P_1V_1^\gamma = pV^\gamma$ 得 $p = p_1V_1^\gamma \frac{1}{V^\gamma}$, 代入功的定义式 $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ 有

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right] \\ &= \frac{p_1V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned} \quad (8-34)$$

再利用 $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$ 代入上式有

$$A = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma-1} \quad (8-35)$$

绝热过程的功也等于 $p-V$ 图中过程曲线下的面积.

二、绝热线与等温线

我们将绝热线和等温线作一比较, 按绝热方程

$$pV^\gamma = \text{常量}$$

和等温方程

$$pV = \text{常量}$$

在同一 $p-V$ 图上作出这两过程的过程曲线, 如图 8.10 所示. 图中实线是绝热线, 虚线为等温线. 两线在图中的 A 点相交, 绝热线比等温线要陡一些. 这一点通过比较 A 点处的斜率可知.

等温线在 A 点的斜率为

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_T = -\frac{p_A}{V_A}$$

而点 A 绝热线的斜率为

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_Q = -\gamma \frac{p_A}{V_A}$$

因为 $\gamma > 1$, 所以, 绝热线比等温线要陡. 我们可以从分子运动论观点加以理解. 对同样的气体都从状态 A 出发, 膨胀同样的体积 ΔV , 经等温过程到达 C 状态, 而经绝热过程到达 B 状态. 在等温过程中, 随着体积的增加, 气体分子密度将减小, 但分子平均动能不变, 根据公式 $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t$, 气体压强将减小 ΔP_T . 而在绝热过程中, 气体分子密度随体积减小外, 由于气体对外做功, 温度也将降低, 分子平均动能变小, 因此绝热过程中的压强减小量 ΔP_Q 更大一些, 即 $\Delta P_Q > \Delta P_T$, 因此, 绝热些要比等温陡一些.

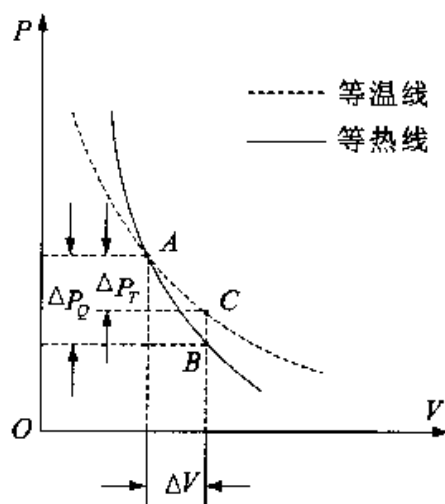


图 8.10 绝热线比等温线陡

三、四种热力学过程的比较

为了便于比较四个热力学过程各自特点, 列表如下:

表 8-1 理想气体热力学过程的主要公式

过程	过程方程	Q	ΔE	A	摩尔热容
等体	$\frac{P}{T} = C$	$\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$	$\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$	0	
等压	$\frac{V}{T} = C$	$\frac{M}{\mu} C_{p,m} (T_2 - T_1)$	$\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$	$P(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{M}{\mu} R (T_2 - T_1)$	$C_{p,m} = \frac{i+2}{2} R$
等温	$pV = C$	$\frac{M}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$	0	$\frac{M}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$	∞
绝热	$pV^\gamma = C$	0	$\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$	$-\frac{M}{\mu} C_{V,m} (T_2 - T_1)$ 或 $\frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}$	0

例 8-2 1 摩尔的氧气, 温度为 300 开时, 体积为 2×10^{-2} 米³. 试计算在下列准静态过程中, 氧气所作的功和吸收的热量:

(1) 绝热膨至体积为 20×10^{-2} 米³;

(2) 等温膨胀至体积为 20×10^{-2} 米³, 然后再等容冷却, 直到温度等于绝热膨胀后所达到的温度为止.

解 (1) 以 1 摩尔氧气为研究对象(选作系统), 并视氧气为理想气体.

由题意知 $\frac{M}{\mu} = 1$ 摩尔, $T_1 = 300\text{K}$, $V_1 = 2 \times 10^{-2} \text{m}^3$, $V_2 = 20 \times 10^{-2} \text{m}^3$.

系统从状态 1 绝热膨胀至状态 2, 在 $p-V$ 图中画出其绝热线如图 8.11 所示.

根据绝热过程的特点知氧气吸收热量为零即

$$Q_{12} = 0$$

由热力学第一定律

$$Q = A + \Delta E$$

$$\text{得} \quad A_{12} = -\Delta E_{21} = \frac{M}{\mu} C_{v,m} (T_1 - T_2) \quad (1)$$

因为氧气为双原子气体, 故

$$C_{v,m} = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} R$$

再根据绝热方程有

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (2)$$

其中

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{\frac{5}{2} R + R}{\frac{5}{2} R} = 1.40$$

联立(1),(2)式解得

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{M}{\mu} \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \\ &= 1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 \times \left[1 - \left(\frac{2 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-2}} \right)^{1.40-1} \right] = 3.75 \times 10^3 \text{ (焦耳)} \end{aligned}$$

(2) 由题意, 系统经历等温过程和等容过程, 在 $p-V$ 图中画出其过程曲线如图 8.11 所示.

在等温过程(图中 1-3)中, 因温度不变, 即 $\Delta T = 0$, 故系统的内能变化量 $\Delta E = 0$. 根据热力学第一定律可得

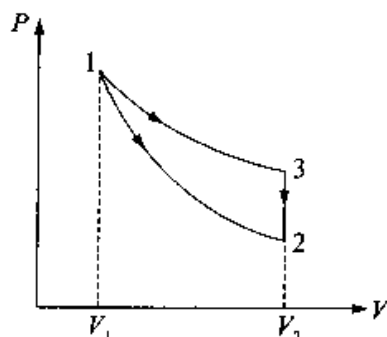


图 8.11

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= Q_{13} = \frac{M}{\mu} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\
 &= 1 \times 8.31 \times 300 \times \ln\left(\frac{20 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}}\right) = 5.74 \times 10^3 \text{ (焦耳)}
 \end{aligned}$$

在等体过程(图中 3 → 2)中, 因为 $\Delta V = 0$, 故做功为零, 即

$$A_{32} = 0$$

根据热力学第一定律, 此过程系统吸热为

$$\begin{aligned}
 Q_{32} &= \Delta E_{23} = \Delta E_{21} = \frac{M}{\mu} C_{v,m} (T_1 - T_2) \\
 &= -\frac{M}{\mu} C_{v,m} T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] \\
 &= -1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 \times \left[1 - \left(\frac{2 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-2}}\right)^{1.40-1}\right] \\
 &= -3.75 \times 10^3 \text{ (焦耳)}
 \end{aligned}$$

负号表示系统放热.

因此, 在过程 1 → 3 → 2 中, 系统吸收的热量为

$$\begin{aligned}
 Q_{132} &= Q_{13} + Q_{32} = 5.74 \times 10^3 + (-3.75 \times 10^3) \\
 &= 1.99 \times 10^3 \text{ (焦耳)}
 \end{aligned}$$

系统所作的功为

$$A_{132} = A_{13} = 5.74 \times 10^3 \text{ (焦耳)}$$

例 8-3 1mol 双原子分子理想气体, 从状态 $A(p_1, V_1)$ 沿 $P-V$ 图所示沿直线变化到状态 $B(p_2, V_2)$ 试求:

- (1) 气体的内能增量;
- (2) 气体对外界所作的功;
- (3) 气体吸收的热量;
- (4) 此过程的摩尔热容.

解 此过程不是我们前面所讨论的四个过程, 为一任意准静态过程.

(1) 以 1mol 双原子理想气体为研究对象, 内能增量只与初末两态有关为

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} C_{v,m} (T_2 - T_1) = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) \quad (1)$$

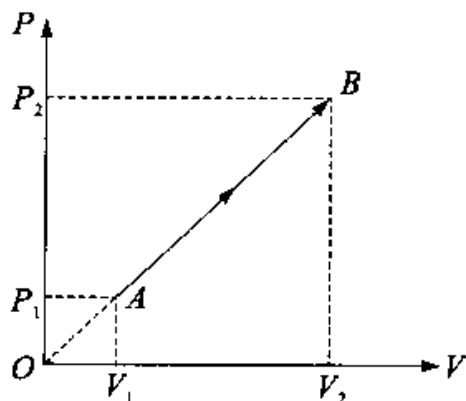


图 8.12

又根据状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 代入(1)式,得

$$\Delta E = \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{5}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) \quad (2)$$

(2) 根据功等于过程曲线下的面积可知此过程中功为梯形 ABV_2V_1 的面积.

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_2 + p_2V_2 - p_1V_1 - p_2V_1) \quad (3)$$

由 $\triangle OAV_1$ 与 $\triangle OBV_2$ 相似得

$$p_1V_2 = p_2V_1 \quad (4)$$

由(3)式和(4)式得

$$A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) \quad (5)$$

(3) 根据热力学第一定律有

$$\begin{aligned} Q = \Delta E + A &= \frac{5}{2}(p_2V_1 - p_1V_1) + \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) \\ &= 3(p_2V_2 - p_1V_1) \end{aligned} \quad (6)$$

(4) 将(6)式应用于 $A \rightarrow B$ 过程中任一微小状态变化过程有:

$$dQ = 3d(pV) \quad (7)$$

又由状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}pT$ 知

$$d(pV) = \frac{M}{\mu}RdT \quad (8)$$

其中 $\frac{M}{\mu} = 1$ 摩尔.

由(7)式和(8)式解出 $dQ = 3RdT$

由摩尔热容定义 $C = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_m = 3R$.

由此题可知,理想气体内能仅是温度的单值函数,在解题中是很重要的概念.另外,在过程曲线比较规则时,应用图示面积法求功,非常方便.热力学第一定律和理想气体状态方程在任何过程中都要用到,必须熟练掌握.

从上面例题可看出,应用热力学第一定律解题时的过程大致可归纳为:(1)选取研究对象,明确过程中初末两态的已知和未知状态参量;(2)明确过程及其过程的特征,应用状态方程或过程方程,求出 p, V, T 等状态参量;(3)应用内能,热量、功的计

算关系式和热力学第一定律列出方程求解未知量；(4) 如果问题是由几个分过程组成的联合过程，则应分为几个过程分别求解，还要注意两分过程之间的连接状态，求出连接状态的参量。(5) 另外还须注意计算中要采用统一的计量单位，一般取国际制单位。

§ 8.4 循环过程

一、循环过程

热力学理论的发展是随着研究热机的工作过程而建立起来的。所谓热机就是某种工作物质(工质)不断地把吸收的热量转变为机械能的装置。简单说热机就是利用热来作功的机器，例如蒸汽机、汽轮机、内燃机等。

为了能使热机将热转化为功的过程持续地进行下去，就需要利用循环过程。系统经过一系列状态过程后，又回到原来状态的过程叫做热力学循环过程，简称循环。理想气体的等温膨胀过程能够把从外界吸收的热量全部用来对外作功，热能转化为功的效果最好，但是仅借助于这种过程，不可能制成实用的热机。这是因为气体在膨胀过程中，气体的体积越来越大，压强则越来越小，最终，系统内压强和外界压强相等，膨胀过程就不能继续了，因此，单一的热力学过程，无法实现对外持续不断的作功。

为了在循环过程中，使系统对外作功，就需要系统在膨胀过程和压缩过程中所经历的路径不能重复。考虑以气体为工质的准静态循环过程，在 $p-V$ 图上可用一条闭合曲线来表示，如图 8.13 所示。系统从初态 I 开始，沿 I a II 曲线膨胀到状态 II，此过程中，系统从外界(高温热源)吸热 Q_1 ，并对外作功 A_1 (等于 V_1 I a II V_2 包围的面积)；然后再将气体由状态 II 经 II b I 压缩回到初态 I，此过程中，外界对系统作功 A_2 (等于 V_1 I b II V_2 包围的面积) 向外界(低温热源)放出热量 Q_2 。整个循环

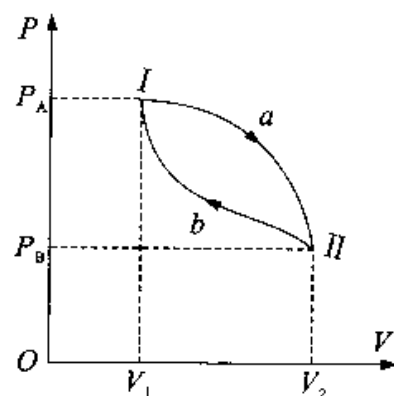


图 8.13

过程中，系统对外作的净功为 $A = A_1 - |A_2|$ ，其大小等于闭合曲线 I a II b I 包围的面积。如果循环沿顺时针方向进行，则循环中系统对外作正功，这样的循环称为正循环；反之，若循环沿逆时针方向进行，则循环中系统对外作负功，这样的循环称为逆

循环,在逆循环中,外界对系统做功,系统从低温热源(冷库)吸热而向外界放热,系统作逆循环的机器叫做致冷机.

因为内能是系统状态的单值函数,所以系统经历一个循环过程后,它的内能没有改变,即 $\Delta E = 0$,这是循环过程的重要特征.

二、循环效率

在正循环中,目的是利用热机对外做功.因此定义热机的工作物质在一次正循环中所作的功与它从外界吸收的热量 Q_1 的比值称为热机效率(循环效率).即

$$\text{热机效率} = \frac{\text{输出功}}{\text{输入能量}} \times 100\% = \frac{\text{对外作的净功}}{\text{从高温热源吸收的热量}} \times 100\%$$

用数学语言表示为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \times 100\% = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \times 100\% = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\% \quad (8-36)$$

上式表明,当循环过程中工作物质吸收的热量相同时,对外作净功愈多,热机效率愈高.

逆循环过程中,致冷机的目的是通过消耗外界的机械功,使工作物质从低温热源(冷库)中吸取热量,释放到高温热源处.因此,定义一可逆循环中工质从冷库中吸取的热量 Q_2 与外界对工作物质作的功 A 的比值,称为循环的致冷系数,即

$$\text{致冷系数} = \frac{\text{自低温热源吸收热量}}{\text{外界消耗的机械功}}$$

用数学语言表示为

$$\omega' = \frac{Q_2}{A} \quad (8-37)$$

此式说明,当外界消耗的功相同时,工作物质从冷库中取出的热量愈多,致冷系数愈大.

例 8-4 如图 8.14 所示,1mol 单原子理想气体,从初态 a 过渡到另一状态 b ,又经等体过程到状态 c 回到状态 a ,完成一个循环,求:

- (1) 整个循环过程中,系统对外界所作的净功;
- (2) 循环效率.

解 (1) 系统对外界所作的净功的数值等于闭合曲线 abc 所包围的面积,由于该循环为正循环,所以 $A_{\text{净}}$ 为正值.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{净}} &= \frac{1}{2}(p_b - p_c)(V_c - V_a) \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1.013 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3} \\
 &= 1.013 \times 10^2 \text{ J}
 \end{aligned}$$

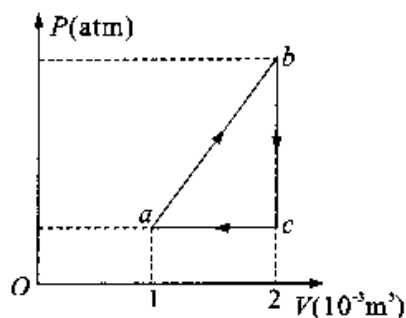


图 8.14

(2) 为求效率,需计算整个循环过程中吸收的热量,下面分析每个过程的吸热放热情况.

$a \rightarrow b$ 过程,由于 $T_b > T_a$, $A_{ab} > 0$,所以 $Q_{ab} > 0$,该过程系统吸热.

$b \rightarrow c$ 过程, $Q_{bc} = E_c - E_b$,由于 $T_c < T_b$,所以 $Q_{bc} < 0$,该过程系统放热.

$c \rightarrow a$ 过程, $T_c < T_a$, $E_a - E_c < 0$, $Q_{ca} < 0$,因此 $Q_{ca} < 0$.故该过程亦为放热.整个循环过程只有 ab 过程吸热,故

$$Q_{\text{吸}} = Q_{ab} = E_b - E_a + A_{ab}$$

其中 A_{ab} 的值等于梯形 1AB2 的面积.即

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{吸}} &= C_V(T_b - T_a) + \frac{1}{2}(P_a + P_b)(V_b - V_a) \\
 &= \frac{3}{2}R\left(\frac{P_b V_b}{R} - \frac{P_a V_a}{R}\right) + \frac{1}{2}(P_a + P_b)(V_b - V_a) \\
 &= \frac{15}{2}P_c V_a + 2P_a V_a \\
 &= \frac{19}{2}P_a V_a = \frac{19}{2} \times 1 \times 1.013 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3} \\
 &= 9.264 \times 10^2 \text{ (J)}
 \end{aligned}$$

循环效率

$$\eta = \frac{A_{\text{净}}}{Q_{\text{吸}}} \times 100\% = \frac{1.013 \times 10^2}{9.264 \times 10^2} \times 100\% = 11\%$$

效率一般用百分比表示,从此例可看出,热转化为功的效率一般都较低.

三、卡诺循环及其效率

设计一种热机,使其在吸收一定的热量下对外作功最多,是 18 世纪末和 19 世纪初热机工程师追求的目标.1824 年,法国青年工程师卡诺通过对当时英国蒸气机的研究,成功地设计出一种理想热机.该循环不考虑内摩擦等各种损耗,整个循环工作

于两个热源之间,由四个准静态过程组成,其中有两个是等温过程,两个是绝热过程,称为卡诺循环.卡诺循环对工作物质没有规定.为方便讨论,我们以理想气体为工质.

如图 8.15(a) 所示, I → II 过程与高温热源相接触,进行等温膨胀,并对外做功; II → III 为绝热膨胀过程,温度降到与低温热源的温度相同,并对外做功; III → IV 过程与低温热源接触,并进行等温压缩,外界对气体做功,气体向低温热源放热; IV → I 为绝热压缩过程外界对气体做功,温度升高,恢复到初始状态,完成一个循环.这种正循环为卡诺正循环,又称卡诺热机.图 8.15(b) 为工作示意图.

下面我们来求卡诺热机的效率,因为两个绝热过程没有热交换,用求净热的方法求效率较为简便.

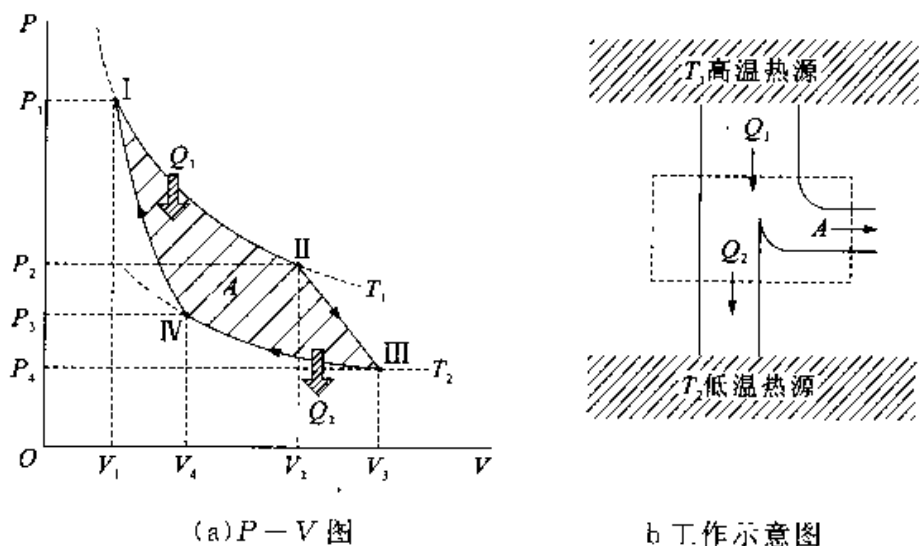


图 8.15 卡诺正循环热机

在 I → II 等温膨胀过程中,气体由高温热源吸收的热量为

$$Q_1 = A_1 = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

其中, M 为工质质量, μ 为摩尔质量, T_1, V_1 为初态 I 的温度和体积, V_2 为状态 II 的体积.

在 III → IV 等温压缩过程中,气体向低温热源放出的热量为

$$-Q_2 = A_3 = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

即

$$Q_2 = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

其中 T_2 为低温热原处温度, V_3, V_1 为状态 III 和状态 IV 的体积. 由热机效率的定义有

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\ln \frac{V_3}{V_1}}{\ln \frac{V_2}{V_1}}\right) \times 100\% \quad (8-38)$$

又由理想气体绝热方程 $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$, 可得

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

及

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

两式相除有

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

代入(8-36)式有

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \times 100\% = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \times 100\% \quad (8-39)$$

由上述结果可得出以下结论:

(1) 要完成一次卡诺循环必须有高温热源和低温热源, 若工质在高温热源(温度 T_1) 和低温热源(温度 T_2) 处分别吸热 Q_1 和放热 Q_2 , 则有

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (8-40)$$

(2) 给出了提高热机效率的途径, 卡诺热机的效率与工作物质无关, 只与两个热源的温度的温度有关, 高温热源与低温热源的温差越大, 卡诺循环的效率越高.

(3) 指出了热机效率的极限.

卡诺热机效率最大值必定小于 1, 即 $\eta < 1$. 即不可能将热能完全转化为机械能.

对卡诺逆循环, 即卡诺致冷机, 同样可得出致冷系数

$$w_c = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (8-41)$$

例 8-5 如图 8.16 所示为一定量理想气体所经历的循环过程, 其中 AB 和 CD 是等压过程, BC 和 DA 为绝热过程. 已知 B 点和 C 点的温度分别为 T_B 和 T_C , 求循环效率, 这是卡诺循环吗?

解 根据热机效率定义

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\%$$

在此循环过程中只有 AB 过程吸热,有

$$Q_1 = \frac{M}{\mu} C_p (T_B - T_A)$$

在 CD 过程中放热大小为

$$Q_2 = \frac{M}{\mu} C_p (T_C - T_D)$$

因此有

$$\begin{aligned} \eta &= \left(1 - \frac{\frac{M}{\mu} C_p (T_C - T_D)}{\frac{M}{\mu} C_p (T_B - T_A)} \right) \times 100\% \\ &= \left(1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} \right) \times 100\% \\ &= 1 - \frac{T_C \left(1 - \frac{T_D}{T_C} \right)}{T_B \left(1 - \frac{T_A}{T_B} \right)} \times 100\% \end{aligned} \quad (1)$$

利用过程方程求 T_D, T_C, T_B, T_A 关系.

根据等压过程方程有

$$\begin{cases} \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} & (2) \\ \frac{V_D}{V_C} = \frac{T_D}{T_C} & (3) \end{cases}$$

根据绝热过程方程有

$$\begin{cases} V_C^{\gamma-1} T_C = V_B^{\gamma-1} T_B & (4) \\ V_D^{\gamma-1} T_D = V_A^{\gamma-1} T_A & (5) \end{cases}$$

联列求解(2)(3)(4)(5)得

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C} \quad (6)$$

将(6)式代入(1)式得

$$\eta = \left(1 - \frac{T_C}{T_B} \right) \times 100\%$$

从 η 的形式上看象卡诺循环,但实际上不是,因为 T_C 和 T_B 只是 C 和 B 两状态的温

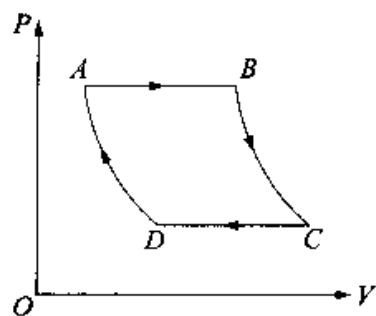


图 8.16

度,而 AB 和 CD 过程中各状态的温度是不同的,而卡诺循环必须有两个等温过程.

例 8-6 设想利用海水表面和深处的温度差来制成热机. 已知海水表面温度约 22°C , 水深 500m 处温度约 2°C . 求

(1) 在这两个温度之间工作的卡诺热机的效率是多大?

(2) 此卡诺热机工作时获得的机械功率是 1MW , 它将何以速率排出废热?

解 (1) 由卡诺热机效率公式

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \times 100\%$$

其中 $T_1 = 273 + 22 = 295(\text{K})$

$$T_2 = 273 + 2 = 275(\text{K})$$

所以热机效率为

$$\eta = \left(1 - \frac{275}{295}\right) \times 100\% = 6.8\%$$

(2) 由热机效率定义

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{Q_2}{A + Q_2}\right) \times 100\%$$

可得

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{A(1-\eta)}{\eta} = \frac{A(1-\eta_c)}{\eta_c} \\ &= \frac{10^6 \times (1-0.068)}{0.068} = 14 \times 10^6 (\text{J}) \end{aligned}$$

即热机将以 14MW 的速率排出废热.

计算热机循环效率和致冷系数的问题, 首先判断是否为准静态过程, 对准静态循环过程, 可先画出循环的 $p-V$ 图, 分析工质在各个过程中吸热、放热及做功情况.

对于计算功和吸热 Q , 较简便时利用 $\eta = \frac{A}{Q_2 + A}$ 计算效率. 只有循环为卡诺循环时,

才能利用 $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 计算效率. 对于逆循环过程求致冷系数的计算方法与热机效率的计算类似.

思考题

8-1 做功和传热都能使系统内能发生变化,但两者又有本质上的区别,怎样理解?

8-2 一定量的理想气体,从 $P-V$ 图上同一初态 A 开始,分别经历三种不同的过程,过渡到不同的末态,但末态的温度相同,如图 8.17 所示,其中 $A \rightarrow C$ 是绝热过程,问

(1) 在 $A \rightarrow B$ 过程中气体是吸热还是放热?为什么?

(2) 在 $A \rightarrow D$ 过程中气体是吸热还是放热?为什么?

8-3 两条绝热线能否相交?为什么?

8-4 为什么同一种理想气体的定压摩尔热容 C_p 大于定容摩尔热容 C_v ?

8-5 理想气体卡诺循环过程的两条绝热线下的面积大小(图 8.18 中阴影部分)分别为 S_1 和 S_2 ,则二者的大小关系是什么?为什么?

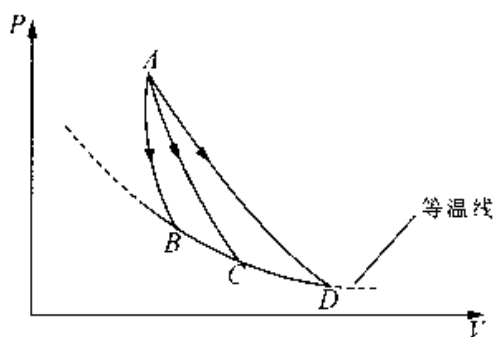


图 8.17

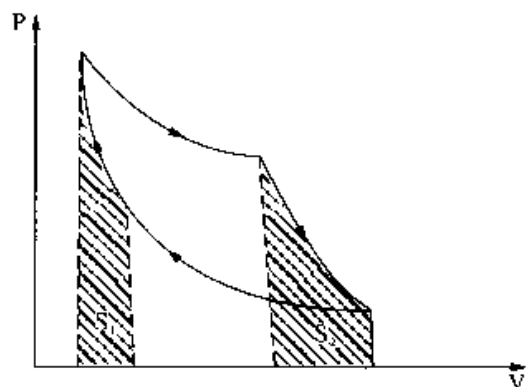


图 8.18

8-6 一条等温线与一条绝热线能否相交两次?为什么?

8-7 能否对物体加热而其温度保持不变?没有热交换而系统的温度发生变化,有可能吗?

8-8 某理想气体按 $pV^2 = \text{恒量}$ 的规律膨胀,问此理想气体的温度升高了还是降低了?

8-9 一个卡诺机在两个温度一定的热库之间工作时,如果工质体积膨胀得多些,它做的净功是否就多些?它的效率是否就高些.

习 题

8-1 如图 8.19 所示的长方形容容器,用一隔板 AB 分成两个体积相同的部分,一边是 H_2 气,一边是 CO_2 气体.并且两边气体质量相等,温度相同.若隔板与器壁无摩擦,隔板会如何移动? ()

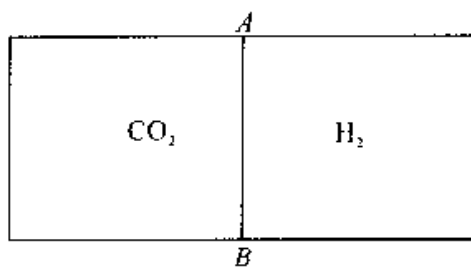


图 8.19

- A. 不会移动 B. 向右移动
C. 向左移动 D. 无法判定.

8-2 理想气体经历如图 8.20 所示的 abc 准静态过程,则该系统对外作功 A ,从外界吸收的热量 Q 和内能的增量 ΔE 的正负情况为 ()

- A. $\Delta E > 0, Q > 0, A < 0$
B. $\Delta E > 0, Q > 0, A > 0$
C. $\Delta E < 0, Q < 0, A > 0$
D. $\Delta E > 0, Q < 0, A < 0$

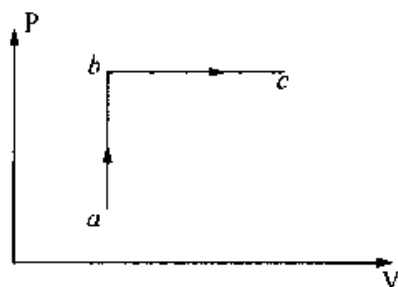


图 8.20

8-3 当盛有理想气体的密封容器突然停止运动时,容器内气体的压强、温度的变化情况是 ()

- A. 容器内气体的压强不变、温度升高.
B. 容器内气体的压强升高,温度不变.
C. 容器内气体的压强,温度均升高.
D. 容器内气体的压强、温度均降低.

8-4 在密闭容器中有 0.5mol 的氧气,温度为 T ,其内能为 ()

- A. $\frac{3}{2}RT$ B. $\frac{5}{2}RT$
C. $\frac{5}{4}RT$ D. $2RT$

8-5 一个理想气体的循环曲线用 $V-T$ 图表示如图 8.21,其中 $3 \rightarrow 1$ 过程和三角形面积反映了循环过程所作功的性质,下述说法正确的是: ()

- A. $3 \rightarrow 1$ 为绝热过程,系统在循环过程中所作净功为正

- B. $3 \rightarrow 1$ 为等压过程, 系统在循环过程中所作净功为正
 C. $3 \rightarrow 1$ 为等压过程, 系统在循环过程中所作净功为负
 D. $3 \rightarrow 1$ 为任意过程, 系统在循环过程中所作净功为正.

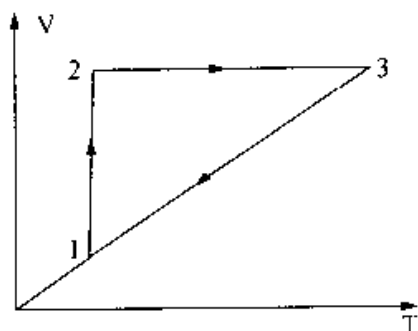


图 8.21

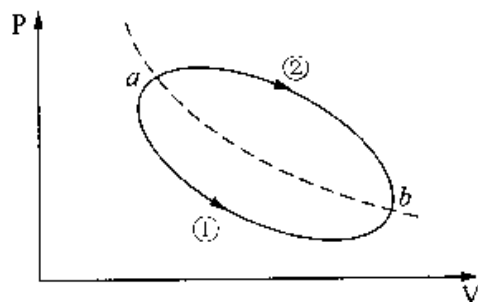


图 8.22

8-6 一定量理想气体在如图 8.22 所示, 从初态 a 经历 ① 或 ② 过程到达末态 b . 已知 a, b 两态处于同一条绝热线上(图中虚线表示绝热线), 则 ()

- A. 两种过程均吸热
 B. 两种过程均放热
 C. ① 过程吸热, ② 过程放热
 D. ① 过程放热, ② 过程吸热.

8-7 某理想气体分别作如图 8.23 所示的两个卡诺循环: I ($abcd a$) 和 II ($a'b'c'd'a'$), 且两条循环曲线所包围面积相等, 则有: ()

- A. $\eta_I < \eta_{II}, Q_I < Q_{II}$
 B. $\eta_I > \eta_{II}, Q_I < Q_{II}$
 C. $\eta_I > \eta_{II}, Q_I > Q_{II}$
 D. $\eta_I < \eta_{II}, Q_I > Q_{II}$

8-8 有人称设计了一台卡诺热机(可逆的), 每循环一次可从 400K 的高温热源吸热 1800J , 向 300K 的低温热源放热 800J , 同时对外作功 1000J , 这样的设计是: ()

- A. 可行的, 因其符合热力学第一定律
 B. 可行的, 因其符合热力学第二定律
 C. 不行的, 因卡诺循环所作功不能大于向低温热源放出的热量
 D. 不行的, 因这个热机的效率超过了理论值.

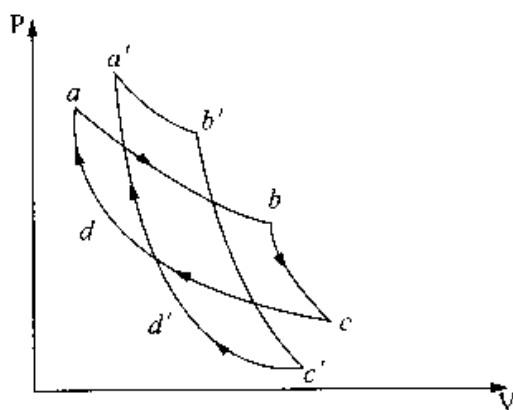


图 8.23

8-9 如图 8.24 所示, T_1 和 T_2 为两条等温线, 若 ab 为一绝热压缩过程, 则理

想气体由状态 c 经 cb 过程被压缩到 b 状态, 在该过程中气体的热容 c 为 ()

- A. $c > 0$
- B. $c < 0$
- C. $c = 0$
- D. 不能确定.

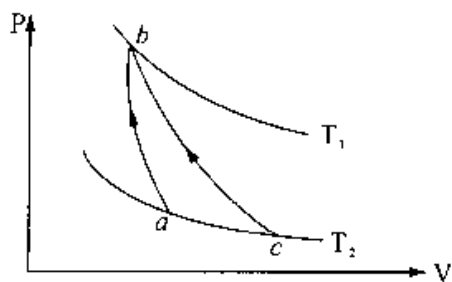


图 8.24

8-10 已知 1mol 的某理想气体(可视为刚性分子), 在等压过程中温度上升 1K, 内能增加 20.78J, 则气体对外做功为 _____, 气体吸收热量为 _____.

8-11 一定量的理想气体, 经绝热压缩由状态 $a(P_1, V_1)$ 变化到状态 $b(P_2, V_2)$, 在此状态变换过程, P 与 $V^{-1/2}$ 成正比, 则在此过程中外界对系统所作的功为 _____.

8-12 氢气和氦气可视为理想气体, 它们从同一初态出发, 分别作绝热膨胀, 则在 $P-V$ 图上两者的绝热线是否重合? _____, 因为 _____.

8-13 如图 8.25 所示, 已知图中画不同斜线的两部分的面积分别是 S_1 和 S_2 , 那么若气体的膨胀过程为 abc , 则气体对外做功 $A =$ _____; 若气体进行 $adcba$ 的循环过程, 则它对外做功为 $A =$ _____.

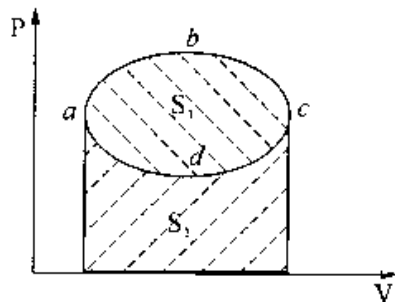


图 8.25

8-14 一卡诺热机(可逆), 低温热源的温度为 27°C , 热机效率为 40%, 其高温热源温度为 _____ K. 今欲将该热机效率提高到 50%, 若低温热源保持不变, 则高温热源的 温度立增加 _____ K.

8-15 如图 8.26 所示, 系统从状态 a 沿 acb 变化到状态 b , 有 334J 的热量传递给系统, 而系统对外做功为 126J,

(1) 若沿曲线 adb 时, 系统做功 42J, 问有多少热量传递给系统?

(2) 当系统从状态 b 沿曲线 bea 返回到状态 a 时, 外界对系统做功 84J, 问系统是吸热还是放热?

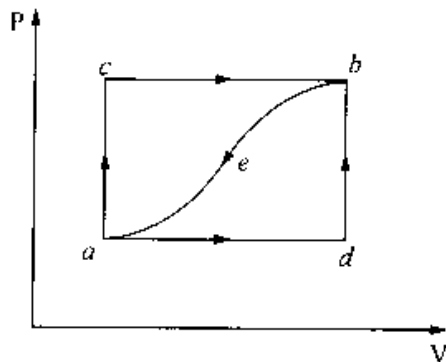


图 8.26

传递热量是多少?

(3) 若 $E_d - E_a = 167\text{J}$, 求系统沿 ad 及 db 变化时, 各吸收多少热量?

8-16 质量为 $6.4 \times 10^{-2}\text{kg}$ 的氧气, 在温度为 27°C 时, 体积为 $3 \times 10^{-3}\text{m}^3$, 计算下列各过程中气体所作的功. (1) 气体绝热膨胀至体积为 $1.5 \times 10^{-2}\text{m}^3$, (2) 气体等温膨胀至体积为 $1.5 \times 10^{-2}\text{m}^3$, 然后再等容冷却, 直到温度等于绝热膨胀后达到最后温度为止. 并解释这两种过程中做功不同的原因.

8-17 一侧面绝热的气缸内盛有 1mol 的单原子分子理想气体, 气体温度 $T_1 = 273\text{K}$, 活塞外压强 $P_0 = 1.01 \times 10^5\text{Pa}$, 活塞截面积 $S = 0.02\text{m}^2$, 活塞质量 $m = 102\text{kg}$ (活塞绝热、不漏气与气缸壁的摩擦可忽略不计), 由于气缸内小突起物的阻碍, 活塞一开始停在距气缸底部为 $L_1 = 1\text{m}$ 处; 今从底部极缓慢地加热气缸气体, 使活塞上升了一段距离 $L_2 = 0.5\text{m}$, 如图 8.27 所示, 求:

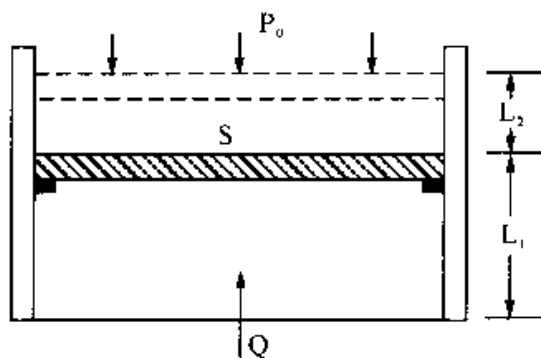


图 8.27

(1) 气缸的气体经历的是什么过程?

(2) 气缸中气体在整个过程中吸热多少?

8-18 1mol 单原子理想气体, 在压缩过程中外界对它做功 209J , 其温度升高 1K . 试求气体吸收的热量与内能的增量, 此过程中气体的摩尔热容是多少?

8-19 喷气发动机的循环可近似用如图 8.28 所示的循环来表示, 其中 ab, cd 分别代表绝热过程, bc, da 分别代表等压过程, 试证明当工质为理想气体时, 循环的效率为 $\eta = 1 - \frac{T_d}{T_c} = 1 - \frac{T_a}{T_b}$.

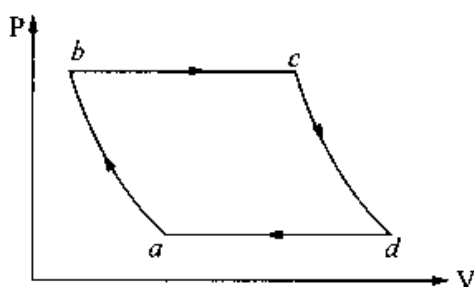


图 8.28

8-20 一台电冰箱, 为了制冰从 260K 的冷冻室取走热量 209KJ . 若室温是 300K , 试问电流做功至少应是多少 (假定冰箱为理想卡诺循环致冷机)? 如果此冰箱能以 0.209KJ/S 的速率取出热量, 试问所需电功率至少应是多少?

8-21 1mol 单原子分子理想气体的循环过程如 $T-V$ 图 8.29 所示, 其中 c 点

的温度为 $T_c = 600\text{K}$. 试求:

- (1) ab, bc, ca 各个过程系统吸收的热量;
- (2) 经一循环系统所作的净功;
- (3) 循环的效率.

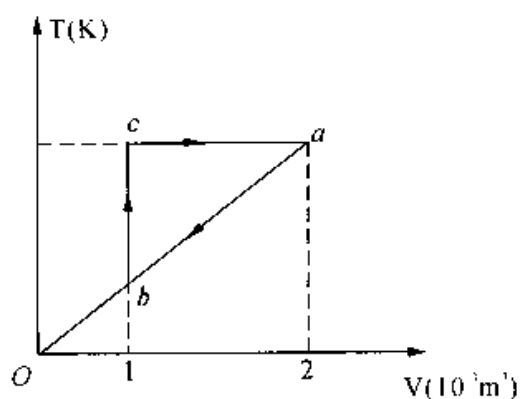


图 8.29

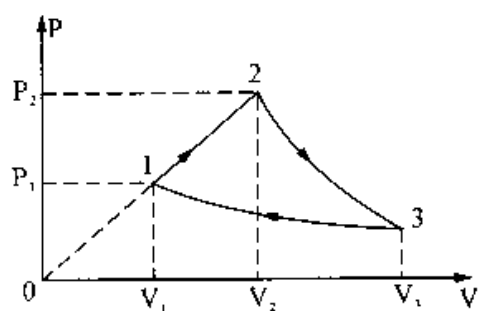


图 8.30

8-22 1mol 双原子分子理想气体作如图 8.30 的可逆循环过程, 其中 1-2 为直线, 2-3 为绝热线, 3-1 为等温线. 已知 $T_2 = 2T_1, V_3 = 8V_1$, 试求:

- (1) 各过程的功, 内能增量和传递的热量; (用 T_1 和已知常数表示)
- (2) 此循环的效率.

第 9 章 不可逆过程与熵

热力学第一定律指出,任何热力学过程都必须遵守能量守恒定律.但是,大量热现象表明,遵守能量守恒定律的热力学过程不一定都能自发地发生.自然界能够自发发生的所有热过程,除需要满足能量守恒定律外,还必须满足热力学第二定律.

熵是物理学中一个很重要的概念.熵概念最初是在热力学中引入的,随着科学的发展和人们认识的深入,熵概念的应用已大大超出热力学范围,它已经被引入到信息论、控制论、宇宙论、生命科学乃至社会、经济的各个领域.有人说,“熵”概念的重要性不亚于“能量”概念,甚至超过“能量”概念,这并不夸大.

本章从分析自然界自然过程的方向入手,介绍热力学第二定律;在讨论克劳修斯等式与不等式的基础上,引入熵概念和熵增加原理;进一步从微观角度出发,讨论熵的统计意义,揭示熵的实质;最后介绍熵概念的新进展——熵与信息.

§ 9.1 热力学第二定律与时间箭头

一、自然过程的方向性

在第 8 章中,我们特别强调了系统状态变化过程中的准静态过程,这是因为在准静态过程中,系统所经历的每一个状态都是平衡(或准平衡)状态,而平衡状态是可以通过少数几个状态参量来描述的最简单的状态,因而准静态过程是可以通过少数几个状态参量来描述其各种细节的过程.这种过程的功、热量、内能变化量都可以用少数几个状态参量及其变化量来表示.由于准静态过程所经历的每一个状态都是平衡态,这就要求过程中的每一步都必须使系统与外界平衡条件得到满足(或近似满足).这样,系统与外界条件的变化都必须无限缓慢,以保证系统的压强、温度等内部参量与外界的这些参量在任何时刻都一致,这在实际上是不可能真正做到的.所以,准静态过程只能是一种理想化的过程.自然界实际发生的热过程只可能做到尽量接近它,而不能完全实现它.

自然过程是指在一个与外界无相互作用的系统(亦称孤立系统)内自然发生的过程。

“君不见黄河之水天上来,奔流到海不复回?君不见高堂明镜悲白发,朝如青丝暮成雪?”诗人哀叹韶华如流,人生易老,这反映了宏观世界的客观规律,实际经验告诉我们,一切自然过程都是按一定方向进行的。

在自然界中,自然过程具有方向性的例子很多,下面举三个典型例子。

(1) 功热转换

功可以完全转变为热,更确切地讲,机械能可以完全转变为内能,摩擦生热就是一个典型的例子。经验证明,机械功可以通过摩擦全部转化为热量,但是要把热量完全变为功而不产生其他影响是不可能的。这就是说摩擦生热过程是不可逆的,它说明自然界中的功热转换过程是具有方向性的。

(2) 热传导

两个温度不同的物体相互接触时,热量总是自动地由高温物体传向低温物体,从而使两物体温度相同而达到热平衡。热量不可能自动地由低温处向高温处传递,这就是说,热量由高温物体传向低温物体的过程是不可逆的,它说明自然界中的热传导过程是具有方向性的。

(3) 气体的绝热自由膨胀

如图 9.1(a) 所示,由绝热壁包围的容器中有一隔板,把容器分成 A、B 两部分,其中 A 内有气体, B 为真空。当绝热容器中的隔板被抽去的瞬间,气体都聚集在容器的左半部 A 内,这是一种非平衡态。此后气体将自动地迅速膨胀,由

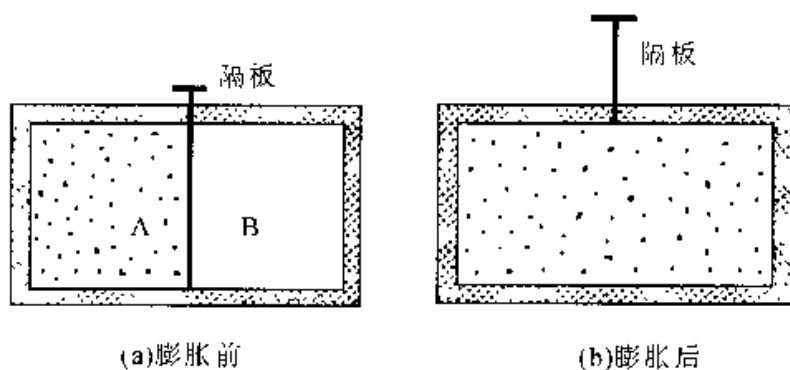


图 9.1 气体的绝热自由膨胀

A 向 B 扩散充满图 9.1(b) 的整个容器,最后达到一平衡态。而相反的过程,即充满容器的气体自动地收缩到只占有原体积的一半,而另一半变为真空的过程是不可能实现的。这就是说气体向真空绝热自由膨胀的过程是不可逆的,表明自然界中气体的自由膨胀过程是具有方向性的。

以上三个典型的实际过程都是按一定的方向进行的,相反方向的过程不能自动

的发生. 由于自然界中一切与热现象有关的实际宏观过程都涉及热功转换或热传导, 都是由非平衡态向平衡态的转化, 因此可以说, 一切与热现象有关的实际宏观过程都是按一定的方向进行的, 都是不可逆的.

二、热力学第二定律

19 世纪初期, 蒸汽机已在工业、航海等部门得到了广泛使用, 并随着技术水平的提高, 蒸汽机的效率也有所增加. 但提高热机效率有没有限制呢? 能否制造出一种热机, 它可把从单一热源吸取的热量完全用来做功呢? 能否制造一种制冷机, 它可以不需要外界对系统做功, 就能使热量从低温物体传递给高温物体呢? 这些问题都是当时在理论上急需解决的问题, 这些问题又不能由热力学第一定律来解决. 人们还发现, 在自然界中不是所有符合热力学第一定律的过程都能发生, 比如混合后的气体不能自动地分离, 自然界自动进行的过程是有方向性的. 为此, 人们意识到有必要在热力学第一定律之外建立另外一条新的定律.

最早提出并沿用至今的热力学第二定律是开尔文表述和克劳修斯表述.

1. 开尔文表述

热力学第一定律指出违背能量守恒定律的第一类永动机是不可能制成的. 科学家们思考着是否可能制成一种循环动作的热机, 把从一个热源吸取的热量全部转变为功, 而不放出热量给低温热源, 因而它的效率可达 100%. 这样的热机并不违反热力学第一定律, 然而在提高热机效率的过程中, 大量的事实说明, 在任何情况下, 热机都不可能只有一个热源, 热机要不断地把从高温热源吸收的热量变为有用功, 就不可避免地将一部分热量传给低温热源. 在总结这些及其它一些实践经验的基础上, 开尔文提出了一条新的普遍原理:

不可能从单一热源吸取热量, 使之完全变为有用功而不产生其它影响.

开尔文表述中, “单一热源”是指温度均匀并且恒定不变的热源. 若热源不是单一的热源, 则工作物质就可以由热源中温度较高的一部分吸热, 而向热源中温度较低的另一部分放热, 这实际上就相当于两个热源. “其他影响”是指除了由单一热源吸热, 把所吸的热量用来做功之外的任何其他变化. 开尔文表述指的是循环工作的热机, 如果工作物质进行的不是循环过程, 而是像等温膨胀那样的过程, 理想气体与单一热源接触作等温膨胀, 内能不变, 是可以把从一个热源吸收的热量全部用于对外做功的, 但是, 这时却产生了其他影响——理想气体的体积膨胀了.

从单一热源吸收热量,使之完全变为有用功而不产生其它影响的机器,称为第二类永动机.第二类永动机并不违反热力学第一定律,不违反能量守恒定律,因而对人们更具有诱惑性.曾有人作过估算,如果能制成第二类永动机,使它吸收海水的热量而做功,那么海水的温度只要降低 0.01K ,所做的功就可供全世界所有的机器使用一千多年.然而,人们经过长期的实践认识到第二类永动机是不可能实现的.所以,热力学第二定律的开尔文表述还可以表达为:第二类永动机是不可能造成的.

2. 克劳修斯表述

在一个与外界没有能量传递的孤立系统中(亦称不受外界影响的系统),如果一个温度为 T_1 的高温物体和一个温度为 T_2 的低温物体,那么,经过一段时间后,整个系统将达到温度为 T 的热平衡状态.这说明在一个孤立系统内,热量是由高温物体向低温物体传递的.我们有这样的经验,就是从未见过一个孤立系统中低温物体的温度会自动地越来越低,高温物体的温度会自动地越来越高,即热量能自动地由低温物体向高温物体传递.显然,这一过程并不违反热力学第一定律,但在实践中确实无法实现.要使热量由低温物体传递到高温物体(如制冷机),只有依靠外界对它做功才能实现.克劳修斯在总结这些规律后得出如下结论:

不可能把热量从低温物体自动传递到高温物体而不引起其他变化.

3. 两种表述的等价性

乍看起来,热力学第二定律的克劳修斯表述与开尔文表述毫无关系,其实,二者是等价的.也就是说,若一种表述不成立,另一种表述也必然不成立.虽然两种表述形式不同,却是互为因果的.

下面我们用反证法来论证:如果克劳修斯的表述不成立,那么,开尔文的表述也不成立.如图9.2(a)所示,在温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源之间有一热机,若该热机违反克劳修斯表述,可以将热量 Q_1 由低温热源自动传递到高温热源,而不产生其他影响.我们在此温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源之间设计一个卡诺热机,令它在一个循环中从高温热源吸取热量 Q_1 ,对外做功 A ,并把热量 Q_2 传递给低温热源,卡诺机是能够实现的,如图9.2(b)所示.当这一过程完成时,高温热源放出的热量和吸收的热量相等,低温热源放出的热量大于吸收的热量,即低温热源净放出的热量为 $Q_1 - Q_2$,而热机对外所做的功为 $A = Q_1 - Q_2$.总的结果是高温热源没有发生任何变化,而只从单一的低温热源吸取热量 $Q_1 - Q_2$,并全部用于对外做功,如图9.2(c)所示.显然这是违反开尔文表述的.所以,如果一个系统违

反克劳修斯表述,必然也违反开尔文表述.

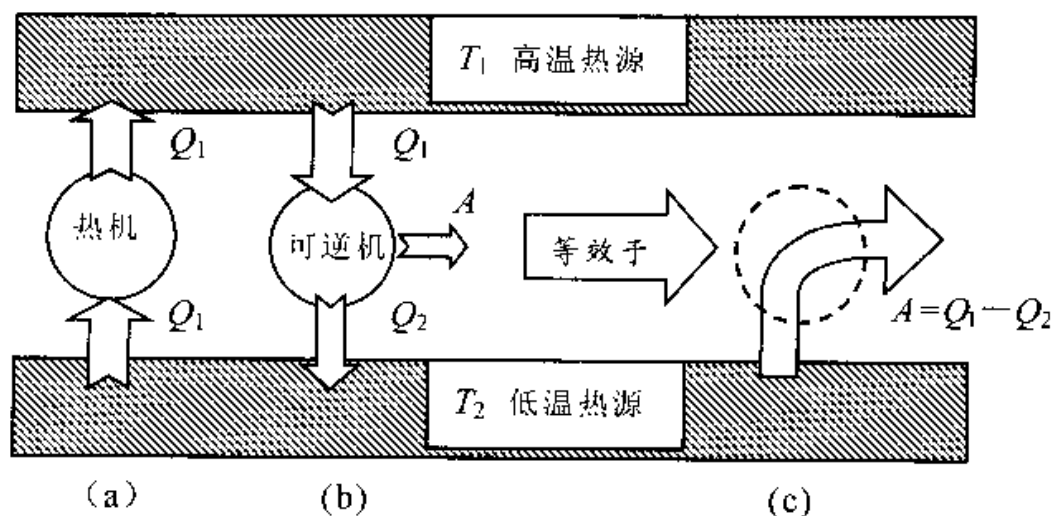


图 9.2 两种表述等价性的证明

类似地,可以证明如果开尔文表述不成立,克劳修斯表述也就不成立,从而证明了这两种表述的等价性.

热力学第二定律不能从更普遍的定律推导出来,它是大量实验和经验的总结,虽然我们不能直接去验证它的正确性,但它得出的推论与客观实际相符而得到肯定.

热力学第二定律的克劳修斯表述和开尔文表述表明,在一个孤立系统中,热量的传递和热功间的转换都是有方向性的.这个方向性就是:在一个孤立系统中,热量只能自动地从高温物体传递给低温物体,而不能相反进行;在一个循环过程中,功可以转变为热,而热不能全部转变为功,功和热的转变是不对称的.

自然过程的单向性指出了时间流逝的单向性,这种时间的单向流逝常被称为“时间箭头”.这种规律是热力学第一定律所不能概括的.而牛顿的动力学方程 $F = m \frac{d^2 r}{dt^2}$ 具有时间反演对称性,即若把时间“ t ”(前进的时间)换成“ $-t$ ”(倒退时间),方程形式不变,表明“过去”与“将来”等价,也无法提供时间箭头的依据.热力学第二定律给出了时间流逝单向性的依据.这种单向性使得“过去”和“未来”不再扮演同样的角色,这中间包含了“时间箭头”.时间和空间位置一样只是描述运动的一根坐标轴,这样,人们就可以把时间和空间位置合起来构成四维空间(在狭义相对论中).

三、可逆过程与不可逆过程

可逆过程和不可逆过程是热力学中的重要概念.由热力学第二定律的克劳修斯

表述可知,高温物体能够自动地把热量传递给低温物体,而低温物体不可能自动地把热量传递给高温物体.如果我们把热量由高温物体传递给低温物体作为正过程,而把热量由低温物体传递给高温物体作为逆过程,很显然逆过程是不能自动进行的.为此,我们把可逆过程和不可逆过程定义如下:

在系统状态变化过程中,如果逆过程能重复正过程的每一状态,而且不引起其他变化,这样的过程叫做可逆过程;反之,在不引起其他变化的条件下,不能使逆过程重复正过程的每一状态,或者虽然能重复但必然会引起其他变化,这样的过程就叫做不可逆过程.

如图 9.1 所示,把隔板抽开后,气体由 A 向真空室 B 扩散,最后两部分达到平衡态.这个过程,我们是可观察到的.但是,上述过程的逆过程却无法自动实现,我们从未观察到 B 中的气体,在没有外界作用的情况下,能自动回到 A 中去,恢复隔板抽开前的状况.显然,气体的扩散是一个不可逆过程.在日常生活中,与此类似的例子可以经常见到.例如,在一个小房间里打开香水瓶盖子,不久,我们可以觉察到香水弥漫于整个房间,但我们决不会觉察到房间空气中的香水分子能自动地跑回到香水瓶中去.香水的扩散过程也是不可逆过程.“飞流直下三千尺”这是诗人赞美庐山瀑布水的壮观.河水从悬崖高处向下奔泻,这是自然规律.但是,我们决看不到从悬崖高处奔流而下的河水能自动回到悬崖高处去.河水从悬崖高处奔流而下也是一个不可逆过程.

除此之外,热功转换、热传导、固体的升华、生命科学里的生长和衰老等都是不可逆过程.在自然界中,不可逆过程是普遍存在的,自然界实际发生的过程都是不可逆的.

可逆过程是理想的,是对准静态过程的进一步理想化,它是实际过程的近似.在系统状态变化过程中,要使逆过程能重复正过程的所以状态,而且不引起其他变化,必须满足:(1)过程进行得无限缓慢,属于准静态过程;(2)没有摩擦力、粘滞力或其他耗散力做功,能量耗散效应可以忽略不计.同时符合这两个条件的过程才为可逆过程.严格地讲,完全无摩擦的准静态过程是不存在的,它只是一种理想过程.但是,我们可以做到非常接近无摩擦的准静态过程的可逆过程,无论是在理论还是在计算上,可逆过程这个概念都有着重要意义.

四、卡诺定理

卡诺提出,在温度为 T_1 的高温热源和温度为 T_2 的低温热源之间工作的循环动

作的机器, 必须遵守以下两条结论, 即卡诺定理.

(1) 在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切可逆机, 都具有相同的效率, 与工作物质无关. 若以 η 代表可逆机的效率, 则

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (9-1)$$

(2) 工作在相同的高温热源和低温热源之间的一切不可逆机的效率都不可能大于可逆机的效率. 若以 η' 代表不可逆机的效率, 则

$$\eta' \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (9-2)$$

式中“=”适用于可逆机, 而“<”适用于不可逆机.

下面利用热力学第二定律证明卡诺定理. 采用反证法.

先证明第一条, 在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切可逆机, 其效率都相同, 与工作物质无关.

如图 9.3 所示, 假设 C、D 均为可逆机, 并且 C 的效率 η 大于 D 的效率 η' , 即

$$\eta = \frac{A}{Q_1} > \eta' = \frac{A'}{Q'_1}$$

将两台可逆机联合, 并令 C 为正循环, D 为逆循环, 调整这两台可逆机, 使 $A = A'$, 则有

$$Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2$$

因为 $\eta > \eta'$, 则 $Q_1 < Q'_1$, 所以 $Q_2 < Q'_2$.

联合机没有外界做功, 却将热量 $Q'_2 - Q_2$ 从

低温热源传递到高温热源, 违反了热力学第二定律, 即 $\eta > \eta'$ 的设定不成立.

同理可以证明, D 机的效率 η' 大于 C 机的效率 ($\eta' > \eta$) 也不成立.

所以, 只有 C、D 机的效率相同, 即 $\eta' = \eta$.

再证明第二条, 设 C 为不可逆机, D 为可逆机, 如图 9.3 所示, 与上面的证明过程相同, 可证明不可逆机 C 的效率不可能大于可逆机 D 的效率. 反过来, 若可逆机 D 的效率不可能大于不可逆机 C 的效率, 则不能成立.

所以, 在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切不可逆机的效率不可能大于可逆机的效率.

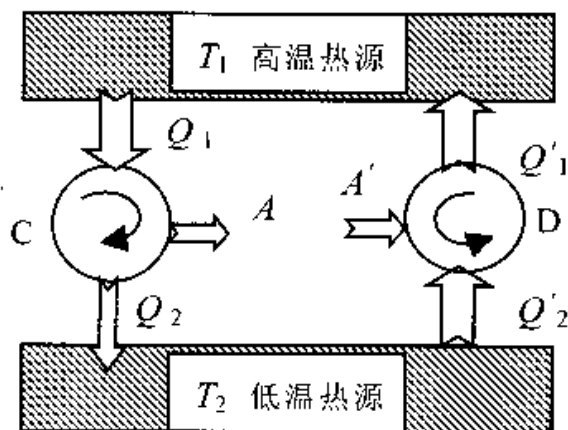


图 9.3 卡诺定理的证明

卡诺定理指出了提高热机效率的途径. 就过程而论, 应当使实际不可逆机尽量地接近可逆机. 对高温热源和低温热源的温度来说, 应该尽量地提高两热源的温差, 温差愈大则热量的可利用价值也愈大. 但是在实际热机中, 如蒸汽机等, 低温热源的温度就是用来冷却蒸汽的冷凝器的温度. 想获得更低的低温热源温度, 就必须用制冷机, 而制冷机要消耗外功, 因此, 用降低低温热源的温度来提高热机的效率是不经济的, 所以要提高热机的效率应当从提高高温热源的温度着手.

§ 9.2 熵概念的引入

热力学第二定律是有关过程进行方向的规律, 它指出: 一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的. 这表明热力学系统所进行的不可逆过程的初态和终态之间有重大的差异性, 这种差异决定了过程的方向. 由此可以预期, 根据热力学第二定律有可能找到一个新的态函数, 根据这个态函数在初、终两状态的差异来对过程进行的方向做出数学分析. 克劳修斯依据热功转换和热传导的不可逆性, 分析了卡诺热机, 推导出了克劳修斯等式, 并在此基础上确立了态函数熵的概念.

一、克劳修斯等式

具有确定的自发进行方向是一切实际不可逆过程的基本特征. 对于可逆过程, 其正过程和逆过程都可自发发生, 从方向上看, 它们之间没有实质性的差异. 可逆过程和不可逆过程的这种差别, 在卡诺定理中又以可逆循环过程和不可逆循环过程效率的不同而表现出来.

设 T_1 和 T_2 分别为高、低温恒温热源的温度, Q_1 是系统从高温热源吸收的热量, Q_2 为系统向低温热源放出的热量. 根据卡诺定理: (1) 在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切可逆机, 都具有相同的效率 η , 与工作物质无关. 即

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

由上式得

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

或

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

在上式中 Q_1 、 Q_2 都是大于零的正值, 是工作物质所吸收热量和所放出热量的数值. 如果我们把 Q 视为一代数量, 规定吸热为正, 放热为负, 则上式应改写成

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (9-3)$$

在可逆卡诺机中, 由两个等温过程和两个绝热过程构成一个循环, 对于绝热过程, $Q = 0$. 从而相应地有 $\frac{Q}{T} = 0$. 因此, 可以把(9.3)式理解为: 当可逆卡诺机的工作物质从某一初态出发, 经历了一个循环又回到原来状态后, 在整个可逆卡诺循环的四个过程中, 量 $\frac{Q}{T}$ 之和为零.

如图 9.4 所示, 有一个可逆循环 P ABCDEFGHA. 此循环中包含有 4 个等温过程和 4 个绝热过程, 其中 AB、CD、EF、GH 为等温过程, BC、DE、FG、HA 为绝热过程, 则此可逆循环可看成由三个卡诺循环 ABJHA、CIGJC、IDEFI 所组成. 假设 AB 过程系统吸收的热量为 Q_2 , CI 过程系统吸收的热量为 Q'_1 , ID 过程系统吸收的热量为 Q''_1 , EF 过程系统吸收的热量为 Q_3 , GJ 过程系统吸收的热量为 Q'_1 , JH 过程系统吸收的热量为 Q''_1 , 由于每一个小的可逆卡诺循环热温比都等于零, 所以系统经历一个 ABCDEFGHA 可逆循环, 系统的热温比应等于三个卡诺循环的热温比之和, 并等于零, 即

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q''_1}{T_1} + \frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q''_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$$

考虑到在温度为 T_1 的情况下, 系统吸收的热量为 $Q_1 = Q'_1 + Q''_1$, 在温度为 T_1 的情况下, 系统吸收的热量为 $Q_3 = Q'_1 + Q''_1$, 上式可写成

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

对于任意可逆循环过程, 如图 9.5 所示的一条封闭曲线 AC_1BC_2A , 可用一连串

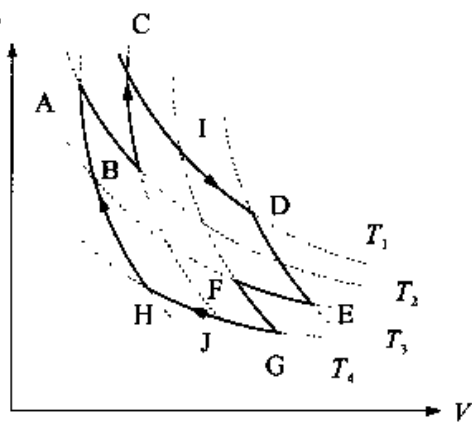


图 9.4 由 4 个等温过程和 4 个绝热过程组成的卡诺循环

微小的可逆卡诺循环过程去代替这个任意的循环. 很容易看出, 任意两个相邻的微小可逆卡诺循环总有一段绝热线是共同的, 但进行的方向相反, 从而效果完全抵消, 因此这一连串微小的可逆卡诺循环的总效果就是图中锯齿形路径(如图中粗线所示)所表示的循环过程. 如果使每个微小卡诺循环无限小, 从而使卡诺循环的数目 $n \rightarrow \infty$, 则这锯齿形路径所表示的循环过程将无限趋于原来所考虑的任意可逆循环过程. 对于每一微小的可逆的卡诺循环都可列出(9-3)式所表示的关系, 把这些关系式相加, 可得到一连串微小的可逆卡诺循环中量 $\frac{Q}{T}$ 的总和, 即有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$$

令 $n \rightarrow \infty$, 可得到任意的可逆循环过程中量 $\frac{Q}{T}$ 的总和, 即有

$$\oint_R \frac{dQ}{T} = 0 \quad (9-4)$$

上式称为克劳修斯恒等式, 其中 dQ 表示系统在一无穷小过程中(这时温度为 T) 所吸收的热量, 积分号下的“R”表示沿一可逆(reversible)循环过程求积分, (9-4)式表明, 对于任意系统, 沿任意可逆循环一周, dQ/T 的积分为零.

二、态函数熵

下面根据克劳修斯恒等式(9-4)证明存在一个态函数. 如图 9.6 所示, 可逆循环中有两个状态 A 和 B. 这个可逆循环可分 AC_1B 和 BC_2A 两个可逆过程. 由式(9-4), 有

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{AC_1B} \frac{dQ}{T} + \int_{BC_2A} \frac{dQ}{T} = 0$$

由于上述每一过程都是可逆的, 故正、逆过程热温比的值相等但反号, 有

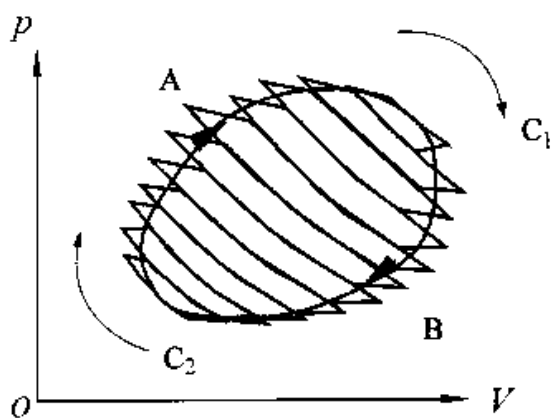


图 9.5 任意可逆循环可看作无穷多个卡诺循环组成

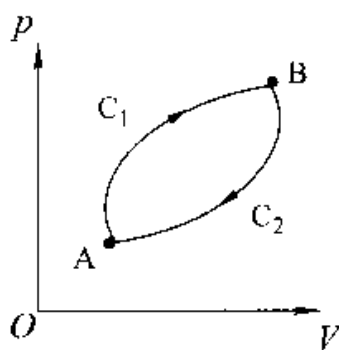


图 9.6 态函数熵的引入

$$\int_{H_2 A} \frac{dQ}{T} = - \int_{A C_2 H} \frac{dQ}{T}$$

于是

$$\int_{A C_1 B} \frac{dQ}{T} = \int_{A C_2 B} \frac{dQ}{T}$$

这个结果表明,系统从状态 A 到达状态 B,无论经历哪一个可逆过程,热温比 $\frac{dQ}{T}$ 的积分都是相等的.这就是说,沿可逆过程的 $\frac{dQ}{T}$ 的积分,只决定于始、末状态,而与过程无关.由此可以知道存在一个只由系统状态决定的物理量,即状态量.这个与状态有关的物理量被称为熵,是系统的一个状态函数,它的定义是:

当系统由平衡态 A 过渡到平衡态 B 时,其熵的增量等于系统沿任何可逆过程由状态 A 到状态 B 的 $\frac{dQ}{T}$ 的积分.

以 S_A 和 S_B 分别表示系统在初态 A 和末态 B 时的熵,则根据定义,有

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (9-5)$$

式中积分号下的“R”表示沿可逆(reversible)过程积分.按此定义式,熵的单位是 $J \cdot K^{-1}$.对于无限小的过程,由上式有

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (9-6)$$

式(9-5)和式(9-6)叫做克劳修斯熵公式.

“熵(entropy)”这个概念是克劳修斯于1865年首先认识并定名的,其意义是“内能转变为功的本领”.英文名熵(entropy)来自意思为“变换”的希腊字“trope”,加了一个前缀 en,以便与能量(energy)这个词相对应.在克劳修斯看来,熵和能这两个概念是有某种相似性的.事实上,能量这一概念,从正面量度着运动转化的能力,能量越大,运动转化的能力越大;熵却从反面,即运动不能转化的一面,量度运动转化能力,表示着转化已经完成的程度,亦即运动丧失转化能力的程度.

中文名“熵”是由胡刚复先生于1923年为普朗克演讲作翻译时选用的一个字,其意为“热量被温度除的商”,加火字旁表明这是一个与热力学有关的物理概念.

根据热力学第一定律,有

$$dQ = dE + pdV$$

与(9-6)式比较,可得

$$TdS = dE + pdV \quad (9-7)$$

这一综合热力学第一定律和第二定律的微分方程,叫热力学基本关系式或热力学定律的基本微分方程.

三、熵的计算

在热力学中,主要根据式(9-5)计算两个平衡态之间熵的变化.计算时应注意:

(1) 在根据定义式(9-5)计算初、末两平衡态的熵差时,其积分路径必须是连接该初、末两态的任一可逆过程.

(2) 由于熵是态函数,与过程无关,所以当系统由一个平衡初态通过任一不可逆过程到达另一平衡态时,必须在始、末两平衡态之间设计一个连接始、末两平衡态的可逆过程.利用所设计可逆过程求出来的熵变,也就是原不可逆过程始、末两态的熵变.

(3) 如果系统分为几个部分,各部分熵变之和等于系统的总熵变.

(4) 利用式(9-5)可以计算熵的变化.若要想利用这一公式求出任意状态的熵,则应先选定某一状态(比如状态O)作为参考状态,并选定此参考状态的熵值为 S_0 ,于是,任意状态的熵可表示为

$$S = \int_{O \rightarrow L} \frac{dQ}{T} + S_0 \quad (9-8)$$

积分号下的“L”表示从参考状态O经准静态过程到任意状态的积分.

在热力工程中,为了计算方便,常把参考状态的熵定为零.在计算水和水汽的熵时,就取 0°C 时纯水的熵值为零.

例 9-1 有 ν mol理想气体,其定体摩尔热容 $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$,从状态A(p_A, V_A, T_A)分别经如图9.7所示的ADB过程和ACB过程,到达状态B(p_B, V_B, T_B).试问在这两个过程中气体的熵变各为多少?(图中AD为等温线).

解 (1)ADB过程的熵变为

$$\Delta S_{ADB} = \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB}$$

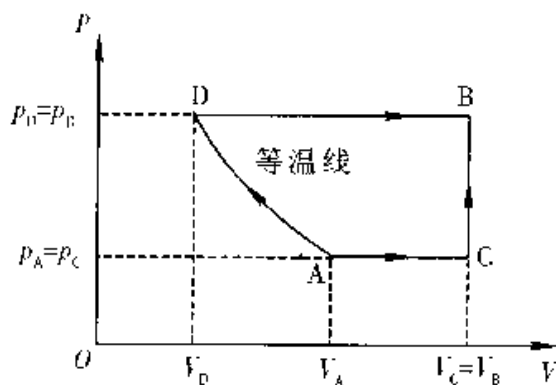


图 9.7

$$\begin{aligned}
&= \int_A^D \left(\frac{dQ}{T}\right)_T + \int_D^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_P \\
&= \int_{V_A}^{V_D} \nu R \frac{dV}{V} + \int_{T_A}^{T_B} \nu C_{p,m} \frac{dT}{T} \\
&= \nu R \ln \frac{V_D}{V_A} + \nu C_{p,m} \ln \frac{T_B}{T_D}
\end{aligned}$$

在等温过程 AD 中, 有 $T_D = T_A$; 等压过程 DB 中, 有 $\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_D}{T_D}$; 而 $C_{p,m} = C_{v,m} + R$, 故 ADB 过程的熵变为

$$\begin{aligned}
\Delta S_{ADB} &= \nu R \ln \frac{T_D V_B}{T_B V_A} + \nu C_{p,m} \ln \frac{T_B}{T_A} \\
&= -\nu R \ln \frac{T_B}{T_A} + \nu R \ln \frac{V_B}{V_A} + \nu (C_{v,m} + R) \ln \frac{T_B}{T_A} \\
&= \nu R \ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{3}{2} \nu R \ln \frac{T_B}{T_A}
\end{aligned}$$

(2) ACB 过程的熵变为

$$\begin{aligned}
\Delta S_{ACB} &= \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = \\
&= \nu C_{p,m} \ln \frac{T_C}{T_A} + \nu C_{v,m} \ln \frac{T_B}{T_C}
\end{aligned}$$

利用 $V_C = V_B, P_C = P_A, \frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A}$ 及 $\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C}$, 则 ACB 过程的熵变可写为

$$\begin{aligned}
\Delta S_{ACB} &= \nu (C_{v,m} + R) \ln \frac{V_B}{V_A} + \nu C_{v,m} \ln \frac{P_B}{P_A} \\
&= \nu R \ln \frac{V_B}{V_A} + \nu C_{v,m} \ln \frac{P_B V_B}{P_A V_A} \\
&= \nu R \ln \frac{V_B}{V_A} + \frac{3}{2} \nu R \ln \frac{T_B}{T_A}
\end{aligned}$$

通过上述计算可以看出, 虽然 ADB 及 ACB 两过程不同, 但熵变相同. 可见, 熵是状态的函数, 状态 A, B 之间的熵变 ΔS_{AB} 不会因路径的不同而改变. 因此, 在计算两平衡态之间熵变时, 可选取比较容易计算的路径进行.

例 9-2 物态变化过程的熵变

(1) 1kg, 0°C 的水, 放到的 50°C 恒温热源上, 最后达到平衡, 求由水和恒温热源所组成的系统在这一过程中引起的熵变, 是增加还是减少?

(2) 如果 1kg, 0°C 的水, 先放到 50°C 的恒温热源上使之达到平衡, 然后再把它

移到 100°C 的恒温热源上使之达到平衡. 求这一过程引起的整个系统(水和两个恒温热源)的熵变, 并与(1)比较.

解 (1) 水的温度升高过程是不可逆的, 必须选择一个使水温升高的可逆过程, 使水与从 0°C 到 100°C 的一系列无穷小温差的热源逐一接触而吸热. 当温度为 T 的水与温度为 $T+dT$ 的热源接触时, 吸热 $dQ = cm dT$, 温度升高 dT 而达到平衡. 这样就可以使水经过准静态的可逆过程温度由 T_1 逐渐升高至 T_2 , 水的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm dT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{373}{273} \\ &= 1.30 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

恒温热源在等温可逆过程条件下进行热交换, 且放出的热量在数值上等于水吸收的热量, 恒温热源的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= \frac{\Delta Q_2}{T} = \frac{-cm(T_2 - T_1)}{T_2} \\ &= \frac{-4.18 \times 10^3 \times (373 - 273)}{373} \\ &= -1.12 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

整个系统的熵变: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

$$\begin{aligned}&= 1.30 \times 10^3 + (-1.2 \times 10^3) \\ &= 1.80 \times 10^2 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

(2) 水的熵变分为两段计算: 从 $0^{\circ}\text{C} \rightarrow 50^{\circ}\text{C}$ 和从 $50^{\circ}\text{C} \rightarrow 100^{\circ}\text{C}$.

水的温度升高过程是不可逆的, 必须选择一个使水温升高的可逆过程, 使水与从 0°C 到 50°C 的一系列无穷小温差的热源逐一接触而吸热. 当温度为 T 的水与温度为 $T+dT$ 的热源接触时, 吸热 $dQ = cm dT$, 温度升高 dT 而达到平衡. 这样就可以使水经过准静态的可逆过程温度由 T_1 逐渐升高至 T' , 水的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S'_1 &= cm \ln \frac{T'}{T_1} \\ &= 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{273 + 50}{273} \\ &= 7.03 \times 10^2 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

同理, 水与从 50°C 到 100°C 的一系列无穷小温差的热源逐一接触而吸热, 经过

准静态的可逆过程温度由 T' 逐渐升高至 T_2 , 水的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S''_1 &= cm \ln \frac{T_2}{T'} \\ &= 4.18 \times 10^3 \times \ln \frac{373}{273 + 50} \\ &= 6.02 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

水的总熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \Delta S'_1 + \Delta S''_1 \\ &= (7.03 + 6.02) \times 10^2 \\ &= 1.30 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

温度为 50°C 的恒温热源在等温可逆过程条件下进行热交换, 且放出的热量在数值上等于水吸收的热量, 50°C 的恒温热源的熵变

$$\begin{aligned}\Delta S'_2 &= \frac{\Delta Q'_2}{T'} = \frac{-cm(T' - T_2)}{T'} \\ &= \frac{-4.18 \times 10^3 \times (323 - 273)}{323} \\ &= -6.47 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

同理, 温度为 100°C 的恒温热源在等温可逆过程条件下进行热交换, 且放出的热量在数值上等于水吸收的热量, 100°C 的恒温热源的熵变

$$\begin{aligned}\Delta S''_2 &= \frac{\Delta Q''_2}{T_2} = \frac{-cm(T_2 - T')}{T_2} \\ &= \frac{-4.18 \times 10^3 \times (373 - 323)}{373} \\ &= -5.60 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{系统总熵变 } \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S'_2 + \Delta S''_2 \\ &= 1.30 \times 10^3 + (-6.47) \times 10^2 + (-5.60) \times 10^2 \\ &= 97.6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

熵也增加了.

比较(1)、(2)两种加热方法, 后一种方法系统的熵变较小. 可见中间热源越多, 熵增加得越少. 如果中间热源“无限多”, 过程就变成可逆的, 而系统的熵将保持不变.

例 9-3 云南鲁甸县大标水岩瀑布的落差为 65m , 流量约为 $23\text{m}^3/\text{s}$. 设气温为 20°C , 求此瀑布每秒钟产生多少熵?

解 水落下后机械能转变为内能,使水温从 T_1 升高到 T_2 . 用 m 表示每秒内落下水的质量,由能量守恒定律有:

$$mgh = cm(T_2 - T_1)$$

得水落下后的温度

$$T_2 = \frac{gh}{c} + T_1$$

水落下后温度从 T_1 升高到 T_2 ,过程是不可逆的. 必须假设一个使水温升高的可逆过程,使水与从 T_1 到 T_2 的一系列无穷小温差的热源逐一接触而吸热. 当温度为 T 的水与温度为 $T + dT$ 的热源接触时,吸热 $dQ = cm dT$,温度升高 dT 而达到平衡. 这样就可以使水经过准静态的可逆过程温度由 T_1 逐渐升高至 T_2 ,则 1 秒内落下水的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm dT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= cm \ln \frac{T_1 + gh/c}{T_1} = cm \ln \left(1 + \frac{gh}{cT_1} \right) \end{aligned}$$

将 $\ln \left(1 + \frac{gh}{cT_1} \right)$ 展开为泰勒级数

$$\ln \left(1 + \frac{gh}{cT_1} \right) = \frac{gh}{cT_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{gh}{cT_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{gh}{cT_1} \right)^3 - \dots = \sum_n (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{gh}{cT_1} \right)^n$$

略去二阶以上小量,则

$$\ln \left(1 + \frac{gh}{cT_1} \right) \approx \frac{gh}{cT_1}$$

所以,1 秒内落下水的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= cm \cdot \frac{gh}{cT_1} = \frac{mgh}{T_1} \\ &= \frac{23 \times 10^3 \times 9.8 \times 65}{293} = 5.0 \times 10^4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

例 9-4 理想气体等值过程的熵变

开始时,理想气体处于 $T_1 = 300 \text{ K}$, $p_1 = 3.039 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 4 \text{ m}^3$ 的状态. 该气体等温地膨胀到体积为 16 m^3 ,接着经过一等体过程而达到某一压强,从这个压强再经一绝热压缩就能使气体回到它的初态,如图 9.8 所示. 设全部过程都是可逆的. 试计算每段过程和循环过程熵的变化(已知 $\gamma = 1.4$)

解 $1 \rightarrow 2$ 等温过程, $dE = 0$. 由热力学第一定律,有 $dQ = pdV$,利用理想气体

状态方程 $pV = \nu RT$, 则 $\left(\frac{dQ}{T}\right)_T = \nu R \frac{dV}{V}$

可得 $1 \rightarrow 2$ 过程气体的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_T &= \int_{V_1}^{V_2} \nu R \frac{dV}{V} \\ &= \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{3.039 \times 10^5 \times 4}{300} \ln \frac{16}{4} \\ &= 5.63 \times 10^3 \text{ J/K} \end{aligned}$$

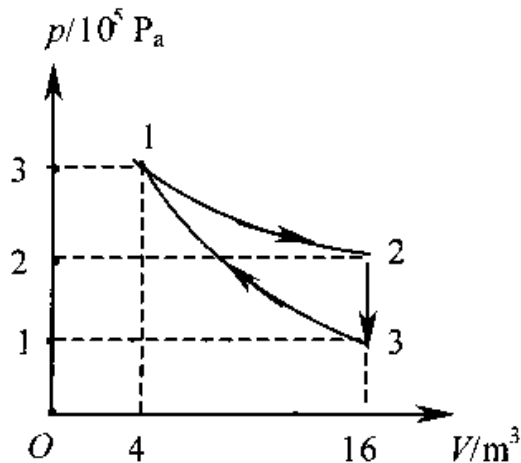


图 9.8

$2 \rightarrow 3$ 等体过程, $dV = 0$, 由热力学第一定律有 $dQ = dE = \nu C_{V,m} dT$, 则气体的熵变为

$$\Delta S_V = \int_{T_2}^{T_3} \frac{\nu C_{V,m} dT}{T} = \nu C_{V,m} \ln \frac{T_3}{T_2}$$

由绝热过程方程, $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$, 有 $T_3/T_2 = T_3/T_1 = (V_1/V_2)^{\gamma-1}$, 所以

$$\begin{aligned} \Delta S_V &= \nu C_{V,m} \ln \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\gamma-1} = \nu(\gamma-1) C_{V,m} \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= \frac{p_1 V_1}{RT_1} (\gamma-1) C_{V,m} \ln \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= \frac{3.039 \times 10^5 \times 4}{300} \ln \frac{4}{16} = -5.63 \times 10^3 \text{ J/K} \end{aligned}$$

$3 \rightarrow 1$ 绝热过程中, 气体的熵变为 $\Delta S_S = 0$

整个循环过程, 气体的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_T + \Delta S_V + \Delta S_S \\ &= 5.63 \times 10^3 + (-5.63 \times 10^3) + 0 = 0 \end{aligned}$$

§ 9.3 熵增加原理

上一节我们从克劳修斯恒等式引出了熵的概念. 现在我们先给出克劳修斯不等式, 再从克劳修斯不等式引出熵增加原理. 再讨论熵增量与能量退降的关系.

一、熵增加原理

任何不可逆循环过程必定是部分的或全部的过程是由不可逆过程所组成的. 根

据卡诺定理:工作在相同的高温热源和低温热源之间的一切不可逆机的效率都不可能大于可逆机的效率

$$\eta < 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

仿照对可逆过程的讨论,易得不可逆循环过程必须遵守的关系式

$$\oint_{iR} \frac{dQ}{T} < 0 \quad (9-9)$$

积分号下的“iR”表示对不可逆(irreversible)循环过程求积分,式(9-8)称为克劳修斯不等式。

如图 9.9 所示, AC_1BC_2A 为一个不可逆循环过程,其中虚线 AC_1B 段为不可逆过程,实线 BC_2A 段为可逆过程。由克劳修斯不等式,对此不可逆循环过程,有

$$\oint_{iR} \frac{dQ}{T} = \int_{iR}^{AC_1B} \frac{dQ}{T} + \int_{R}^{BC_2A} \frac{dQ}{T} < 0$$

由熵的定义式(9-5),有

$$\int_{R}^{BC_2A} \frac{dQ}{T} = - \int_{AC_2}^B \frac{dQ}{T} = -(S_B - S_A)$$

将此式代入上式,可得

$$S_B - S_A > \int_{iR}^{AC_1B} \frac{dQ}{T} \quad (9-10)$$

此式指出:任何不可逆过程熵的增量一定大于过程中系统的热温比之和。而按熵的定义,任何可逆过程熵的增量等于过程中系统的热温比之和。把这两方面结合起来,则任何一个过程都满足

$$S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

S_B 和 S_A 分别是过程末态和初态的熵,“>”号对应不可逆过程,“=”号对应可逆过程。对于绝热过程 $dQ = 0$,所以

$$S_B - S_A \geq 0$$

或

$$\Delta S \geq 0 \quad (9-11)$$

对可逆绝热过程, $\Delta S = 0$; 对不可逆绝热过程, $\Delta S > 0$ 。

由此可以得出结论——熵增加原理:当热力学系统从一个平衡态经绝热过程到达另一个平衡态时,它的熵永不减少;如果过程可逆,则熵不变;如果过程不可逆,

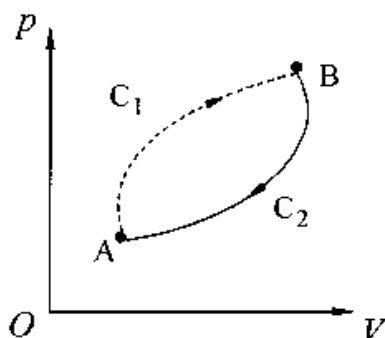


图 9.9 熵增加原理的引入

其熵增加.

(9-11)式就是熵增加原理的数学表示式.熵增加原理又常表述为:一个孤立系统的熵永不减少.

孤立系统是与外界不发生任何相互作用的系统,它与外界之间必然没有热量的传递,因此,一个孤立系统内所进行的过程必定是绝热过程,其熵永不减少.乍看起来,熵增加原理只是对单一物体的孤立系统来说的.实际上,这是一个十分普遍的规律.因为任何一个热过程,只要把过程所涉及到的物体都看作系统的一部分,那么,该系统对于这个过程来说就是孤立系统.过程中这个系统一定遵守熵增加原理.

熵增加原理表明了自然过程的不可逆性,若开始时一个孤立系统处于非平衡态,后来逐渐向平衡态过渡,在此过程中熵不断地增大,最后系统将达到一个熵值不能再增加的状态,这时系统内发生的各种实际热过程都会停止,系统的宏观性质也将稳定而不再变化,这时系统将处于平衡态,系统处于平衡态时其熵达到最大值.因此,用熵增加原理不仅可以判断过程进行的方向,而且可以判断过程的限度.

以熵增加原理表明的自然过程的不可逆性也给出了“时间的箭头”:时间的流逝总是沿着熵增加的方向,逆此方向的时间倒流是不可能的.一旦孤立系统达到了平衡态,时间对该系统就毫无意义了.电影屏幕上显现着向下奔流的洪水冲垮了房屋,你决不会怀疑此惨景的发生.但是,当电影屏幕上显现洪水向上奔流,把房屋碎片收拢在一起,房屋又被重建起来,而洪水向上退去的画面时,你一定会想到是电影倒着放了,因为这种时间倒流的过程实际上根本不可能发生.热力学第二定律决定着在满足能量守恒的条件下,哪些事情可能发生,哪些事情不可能发生.

二、熵增加原理的例证

下面列举两个典型例子,通过计算熵的变化,来验证在孤立系统中的自然过程总是沿着熵增加的方向进行.

1. 有限温度下的热传导

设两物体 A, B 的温度分别为 T_A 和 T_B , 且 $T_A > T_B$, 当它们接触后, 发生一不可逆传热过程, 由于传热只发生在 A, B 之间, 所以可以把它们看作一个孤立系统. 考虑传热刚开始时, 只有少许热量 $dQ (> 0)$ 从 A 传到 B 时引起的熵的变化, 由于 dQ 很小, A 和 B 的温度基本未变. 因此, 计算 A 的熵变时可设想它经历了一个可逆的等温过程放热 $|dQ|$, 据 (9-6) 式, 它的熵变为

$$dS_A = \frac{-dQ}{T_A}$$

同理, B 的熵变为

$$dS_B = \frac{dQ}{T_B}$$

整个孤立系统的总熵变为

$$dS = dS_A + dS_B = dQ \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right)$$

由于 $dQ > 0$, 且 $T_B < T_A$, 所以 $dS > 0$, 表明此不可逆过程沿着熵增加的方向进行.

2. 理想气体的绝热自由膨胀

设有 ν mol 的理想气体, 经绝热自由膨胀, 从体积为 V_1 的平衡态 A 膨胀到体积为 V_2 的平衡态 B, 绝热容器内的理想气体是一个孤立系统. 这显然是不可逆过程.

在理想气体的自由膨胀过程中, 系统对外不做功, 即 $A = 0$, 与外界无热量交换, 即 $Q = 0$, 由热力学第一定律可知 $\Delta E = 0$, 因为理想气体的内能仅与气体的温度有关. 因此, 气体的初、末态温度相同, 即 $T_A = T_B = T$. 为求其熵变, 可设想气体经过一等温可逆过程, 由于等温过程 $dE = 0$, 则 $dQ = dA = p dV$, 故从 A 态 (V_1, T) 到达 B 态 (V_2, T), 有

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{p dV}{T}$$

利用理想气体状态方程, 则

$$\Delta S = \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

因为 $V_2 > V_1$, 所以 $\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$

理想气体的绝热自由膨胀过程中, 熵增加 $\Delta S > 0$, 表明此不可逆过程沿着熵增加的方向进行.

应当指出, 熵增加原理中的“熵增加”, 是指整个孤立系统的熵增加, 也就是组成该孤立系统的所有物体的熵之和是增加的. 至于孤立系统中的一个局部, 在过程中它的熵增加或减少都是可能的. 比如, 例 9.4 中 $1 \rightarrow 2$ 气体的等温膨胀过程 $\Delta S_T > 0$, $2 \rightarrow 3$ 气体的等体压缩过程 $\Delta S_V < 0$. 在有限温差热传导过程中, 高温物体 A 的熵就是减小的, 低温物体 B 的熵增加, 整个孤立系统的总熵是增加的.

例 9-5 在体积分别为 V_1 和 V_2 的两个绝热容器中各装有 ν mol 的同种理想气

体. 最初两容器互相隔绝, 但温度相同, 然后将两容器接通使气体最后达到平衡态. 试求这一过程引起的整个系统熵的变化. 并证明 $\Delta S > 0$.

解 以 T 和 T' 分别表示气体最初和最末状态的温度, 由于容器绝热, 连通时气体未对外做功, 所以内能保持不变, 设最末状态的温度为 T' , 则

$$\nu C_{V,m} T + \nu C_{V,m} T = (\nu + \nu) C_{V,m} T'$$

由此得

$$T' = T$$

即气体的最后温度和最初温度相同. 因此可设想气体的可逆等温过程来计算熵变.

由于在最后达到平衡态时, 两部分气体压强相等, 温度和摩尔数也相同, 所以最后两部分气体的体积相等, 并为 $V' = (V_1 + V_2)/2$, 总体积为 $(V_1 + V_2)$. 设想每部分气体均通过可逆等温过程变化到体积 V' , 对于等温过程 $dE = 0, dQ = p dV = \frac{\nu R T}{V} dV$, 则两部分气体的总熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{V_1}^{V'} \nu R \frac{dV}{V} + \int_{V_2}^{V'} \nu R \frac{dV}{V} \\ &= \nu R \ln \frac{V'}{V_1} + \nu R \ln \frac{V'}{V_2} \\ &= \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{2V_1} + \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{2V_2} \\ &= \nu R \ln \frac{(V_1 + V_2)^2}{4V_1 V_2} \end{aligned}$$

由于 $(V_1 + V_2)^2 > 4V_1 V_2$, 所以 $\Delta S > 0$.

例 9-6 如图 9.10 所示, 一导热隔板将绝热容器分为 A、B 两部分, A、B 中各装有 1 mol 理想气体, 并且 $T_A > T_B$. 试讨论该容器中过程进行的限度.

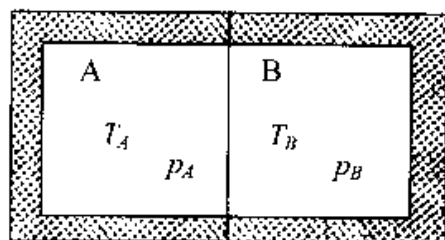


图 9.10

解 总系统由 A、B 两子系统构成. 由于 A、B 两部分之间存在有限温度差, 故 A、B 间的传热过程为不可逆过程. 为求 A、B 两子系统的熵增量, 可假设由

准静态等体过程连接初、末态. 由熵增加原理, A 子系统的熵增量为

$$\Delta S_A = \int_{T_A}^{T'_A} \frac{C_{V,m}}{T} dT = C_{V,m} \ln \frac{T'_A}{T_A}$$

式中 T_A 和 T'_A 分别是 A 子系统的初、末态的温度. B 子系统的熵增量为

$$\Delta S_B = \int_{T_B}^{T'_B} \frac{C_{V,m}}{T} dT = C_{V,m} \ln \frac{T'_B}{T_B}$$

式中 T_B 和 T'_B 分别是 B 子系统的初、末态温度, 总系统的熵增量为

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = C_{V,m} \ln \frac{T'_A T'_B}{T_A T_B}$$

设总系统初始状态的熵为 S_0 , 则其熵的表示式为

$$S = C_{V,m} \ln \frac{T'_A T'_B}{T_A T_B} + S_0$$

由 A、B 两子系统间的热平衡方程

$$C_{V,m}(T_A - T'_A) = C_{V,m}(T'_B - T_B)$$

有

$$T'_B = T_A + T_B - T'_A$$

总系统的熵的表示式可改为

$$S = C_{V,m} \ln \frac{T'_A(T_A + T_B - T'_A)}{T_A T_B} + S_0$$

总系统中所发生的是自发不可逆过程, 根据熵增加原理, 此过程进行的限度可由求

熵的极限条件得出: 令 $\frac{dS}{dT'_A} = 0$

即
$$C_{V,m} \frac{T_A + T_B - 2T'_A}{T'_A(T_A + T_B - T'_A)} = 0$$

可得

$$T'_A = \frac{T_A + T_B}{2}$$

而且

$$T'_A = T'_B$$

即总系统的熵有极值的条件是 A、B 两子系统的温度相等。

又因为
$$\frac{d^2 S}{dT'^2_A} = -2C_{V,m} \left[\frac{T_A + T_B}{2} \right]^{-2} < 0$$

所以, $T'_A = T'_B = \frac{T_A + T_B}{2}$ 时, 总系统的熵达到最大值, 故此状态为过程的限度。

三、熵与能量退降

在热传导过程中, 热量从高温传到低温熵增加意味着什么? 能量的分散和退降! 卡诺定理和热力学第二定律告诉我们, 存在着温度差(这意味着能量适当地集中)才可能得到有用功, 温度均衡了, 能量的数量虽然没变, 但单一热源不能做出有用的功来, 这就是所谓的“能量退降(即能量退化贬值, degradation of energy)”的含义。下

面介绍能量退降的规律.

设有三个恒温热源, 温度为 T_2, T_1, T_0 , 并且 $T_0 < T_1 < T_2$. 如图 9.11(b) 所示, 若令一卡诺热机工作于温度为 T_1 和 T_0 的热源之间, 此卡诺机经过一个循环从温度为 T_1 的热源吸收热量 Q , 对外所做的功为

$$A_1 = \eta Q = \left[1 - \frac{T_0}{T_1}\right]Q$$

另一卡诺机工作于温度为 T_2 与 T_0 的热源之间, 它经过一个循环从温度为 T_2 的热源也吸收热量 Q , 对外所做的功为

$$A_2 = \left[1 - \frac{T_0}{T_2}\right]Q$$

显然, 从高温热源传出的热量做的功 A_1 , 大于从低温热源传出热量所做的功 A_2 , 其数值

$$E_d = A_1 - A_2 = T_0 \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right]Q \quad (9-12)$$

式(9-12)表明, 卡诺循环热机从温度不同的二热源吸收相同的热量 Q , 对外所做的功有差别, 可转化为功的能量减少了, 即能量退降了.

现设想有一金属棒, 其两端的温度分别为 T_1, T_2 , 将此棒置于温度为 T_1, T_2 的二热源之间, 热量 Q 通过该棒由高温热源传入低温热源, 如图 9.11(a) 所示. 在此过程中, 温度为 T_1, T_2 的二热源和金属棒所组成的系统, 其熵增量为

$$\Delta S = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = Q \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right] \quad (9-13)$$

把(9-12)式与(9-13)式相比较, 可得

$$E_d = A_1 - A_2 = T_0 \Delta S \quad (9-14)$$

由此可见, 一定数量的热量 Q , 经热传导过程由高温热源传给低温热源, 再由低温热源传出带动热机做功, 有 $E_d = A_1 - A_2$ 的能量丧失了转变为功的可能性, 这部分能量正比于熵增量 ΔS . 由于自然界发生的所有实际过程都是不可逆的, 这些不可逆过程的不断进行, 使得一些能量不断地转变为不能做功的形式. 能量虽然是守恒的, 但是越来越多的能量不能被用来做功了, 能量的量值未减少, 能量的“质”却降低了.

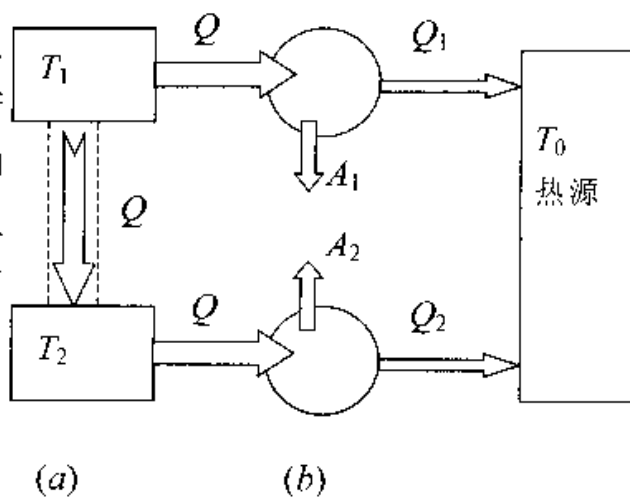


图 9.11 能量退降

§ 9.4 熵与热力学概率

上面我们从宏观角度出发,在讨论自然过程不可逆性的基础上,引入了态函数熵的概念,并讨论了熵增加原理.熵增加原理指出,在孤立系统所经历的不可逆过程中,其熵是增加的,直至孤立系统处于平衡态时,其熵达到最大值.这一节我们将从微观观点出发,用统计方法描述熵的微观本质,从而加深对熵函数和熵增加原理的理解.

一、熵与无序

物质的状态和结构的无序度是与它的混乱程度相联系的,混乱程度愈高,其无序度愈大,反之则小.例如,将几滴墨水滴入一杯清水中,开始时,墨水只存在于局部空间,这时墨水在清水中的分布是不均匀的,其混乱程度较低,我们认为其无序度也较小.由于分子的无规则热运动,墨水逐渐散到整个清水中,随着时间的推移,墨水在空间的分布逐渐趋于均匀,其混乱程度亦逐渐提高,我们说其无序度也增大.当墨水在清水中达到均匀分布时,其混乱程度最高,无序度也最大.

上面仅就物质在空间的分布,阐明了无序度的概念.下面讨论其他一些热力学过程,并把无序度与熵变联系起来.

若在一孤立系统中有两个温度不等的物体相接触,由于热传导的缘故,系统内两物体的温度将由不均匀趋于均匀.在此过程中,系统的无序度将随温度均匀性的提高而有所增加.在 § 9.3 中曾讨论了两个典型例子,其一为孤立系统中两个温度不等的物体间的热传导,其二是理想气体绝热自由膨胀.并得出这两个过程中系统的熵都是增加的结论,即 $\Delta S > 0$.在这两个典型例子中,无论气体从体积为 V_1 的平衡态 A 绝热膨胀到体积为 V_2 的平衡态 B,系统内 A、B 两部分的分子密度由不均匀趋于均匀,还是温度由不均匀趋于趋于.随着熵的增加,系统的无序度总是随着气体分子均匀性的提高而增大.由此可见,在孤立系统的不可逆过程中,系统的熵增加就意味着系统的无序度的增加.

综上所述,对于任何一个孤立系统中的自发过程:从热力学第二定律的角度看,总是自发地朝着熵增加的方向进行,当系统处于平衡态时,系统的熵达到最大值.从微观结构的混乱程度看,总是自发地向无序度增加的方向进行,当系统达到平衡态时,系统的无序度最高.因此,可以说熵是孤立系统的无序度的一种量度.

二、无序度与微观状态数

为了定量的表示系统的无序度,我们先介绍宏观状态的微观状态数的概念,然后说明微观状态数与无序度的关系.

先引入微观状态和宏观状态的概念.为了简单起见,我们讨论由单原子分子所组成的理想气体.要确定气体每个分子的力学运动状态,需要指出分子的位置和速度.对于气体的每一个确定的微观状态,都必须指明其中每个分子所处的位置和所具有的速度,因而气体分子按坐标区间和速度区间的一组分布对应系统的一个微观状态.然而为决定气体的宏观热力学性质并不需要这样详细的微观描述,并不需要了解究竟是哪一个分子在这状态区间内,而只需要确定在任一状态区间内的分子数就行了.系统的宏观状态指的是气体分子数在状态区间内的一组分布.在给定一种宏观状态时,系统的微观状态仍可以各式各样,不同的宏观状态对应的微观状态数不同.

为了便于理解宏观状态和微观状态数概念,我们举一个例子.如图 9.12 所示,有一长方形容器,容器内有可以分辨的 4 个气体分子 a, b, c, d, 设想它们为红、黄、蓝、白 4 个小球,想象地把容器分为大小相等的 A, B 两部分.在无规则运动中,每一时刻,每一个分子都可能处于 A 或 B 中.表 9-1 给出了 4 个分子在容器中的位置分布.

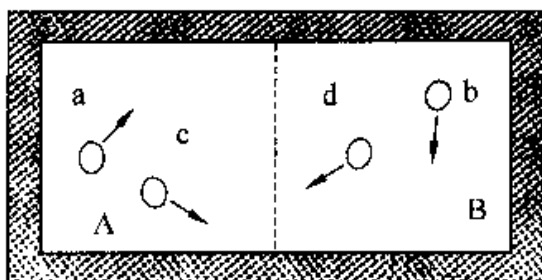


图 9.12 4 个分子在容器中的分布

表 9-1 4 个分子在容器中的位置分布

宏观状态 (分配种类)	I		II		III		IV		V	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
微观状态 (分子分布 方式)	abcd		abc bed cda dab	d a b c	ab ac ad bc bd cd	cd bd bc ad ac ab	a b c d	bed cda dab abc		abcd
一个宏观态对应的 微观状态数 W	1		4		6		4		1	

在统计理论中有一个基本假设(等概率假设):在孤立系统中,各个微观状态出现的概率都是相同的.这也被称为微观态的等概率原理.这就是说,虽然在某一瞬间系统的微观运动状态随时间发生变化,但在足够长的时间内,任一微观状态出现的机会是相等的.既然各微观状态是等概率的,那么,各宏观状态就不可能是等概率的,哪一个宏观状态所包含的微观状态数目多,这个宏观状态出现的机会(概率)就大.这样,微观状态数目就与宏观状态出现的概率对应起来了.

从表 9-1 中可以看出,分子在容器中的分布共有 5 种可能的宏观状态,而与不同宏观状态对应的微观状态(即分子分布方式)又各不相同.这五种宏观状态所对应的微观状态总数为 16,其中 I, V 这两种宏观状态各有 1 个微观状态,表明 4 个分子全部处于 A (或 B) 中的可能性是存在的,其概率最小为 $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$. 类似地计算可以证明:如果共有 N 个分子,则全部 N 个分子都处于 A 中的概率为 $\frac{1}{2^N}$. 例如,对 1 mol ($N_A \approx 6 \times 10^{23}$ 个分子) 的气体来说,所有这些分子全部处于 A 中的概率是 $\frac{1}{2^{6 \times 10^{23}}}$, 这个概率是如此之小,实际上是不会实现的. II, IV 这两种宏观状态各有 4 个微观状态,其概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; III 这种宏观状态(即容器 A, B 两部分各有两个分子)有 6 个微观状态,其概率最大为 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

由上面的分析可见,哪一个宏观状态所包含的微观状态数目多,这个宏观状态出现的机会就大,这样,对应微观状态数目多的宏观状态出现的概率就大.实际上最可能观察到的宏观状态就是在一定条件下出现的概率最大的状态,也就是包含微观状态数最多的宏观状态.对上述容器内封闭的气体来说,也就是容器 A, B 中分子数相等或差不多相等的那些宏观状态.对于实际上分子总数很多的气体系统来说,这些“位置上均匀分布”的宏观状态所对应的微观状态数几乎占微观状态总数的百分之百,因此,实际上观察到的总是这种宏观状态.所以,对应于微观状态数最多的宏观状态就是系统在一定宏观条件下的平衡态.为了定量说明宏观状态与微观状态数的关系,我们定义:

某一宏观状态所对应的微观状态数称为该宏观状态的热力学概率,用 W 表示.

三、玻耳兹曼熵关系式

对一孤立系统的宏观不可逆过程,可以从宏观和微观两个方面来表述.从热力

学观点看,孤立系统的熵要增加,而熵增加的同时,系统的无序度也增大.从统计观点来看,热力学概率是系统无序度的量度,当系统的无序度增大时,其相应的热力学概率也增大.由上述分析可知,一孤立系统的熵 S 增加时,系统的热力学概率也相应地增大.

至于熵 S 与热力学概率 W 之间的关系,严密推导需要用统计物理学知识.这里我们以大家熟悉的理想气体绝热自由膨胀为例,导出这一关系.

在图 9.1 所示的装置中,设容器内有 1mol 理想气体, A 和 B 的体积相等均为 V , 膨胀前初始状态 $V_1 = V$, 膨胀后末态 $V_2 = 2V$. 则气体在此过程中初、末态的熵增量为

$$S - S_0 = R \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2$$

而
则

$$R = N_A k$$

$$S - S_0 = R \ln 2 = N_A k \ln 2 = k \ln 2^{N_A} \quad (9-15)$$

设系统处于某一宏观状态的熵 S 与该状态所对应的微观状态数 W 之间有某种函数关系

$$S = f(W)$$

考虑到整个大系统是由 A 和 B 两个子系统组成的,以 S 表示大系统的熵,以 S_1, S_2 表示 A, B 两个子系统的熵,则

$$S = S_1 + S_2$$

容器 A, B 两半边的微观状态数分别用 W_1 和 W_2 表示,则

$$S = f(W_1) + f(W_2) \quad (9-16)$$

由于隔板是绝热的, A, B 两个子系统之间互不影响,故

$$W = W_1 \cdot W_2$$

因此

$$S = f(W) = f(W_1 W_2) \quad (9-17)$$

要同时满足(9-16)式和(9-17)式, $f(W)$ 应取对数函数

$$S = A \ln W$$

则初、末状态之间的熵增量为

$$S - S_0 = A \ln \frac{W}{W_0} \quad (9-18)$$

初始时,容器一半(A或B)中有 N_A 个分子,另一半没有分子的微观状态数为

W_0 ($W_0 = 2$); 末态时, 1mol 气体分子均匀分布在容器中, 其微观状态数为 W ($W \approx 2^{N_A}$), 则

$$\frac{W}{W_0} = \frac{2^{N_A}}{2} \approx 2^{N_A} \quad (9-19)$$

将(9-19)式代入(9-15)式, 得

$$S - S_0 = k \ln \frac{W}{W_0} \quad (9-20)$$

比较(9-20)式与(9-18)式, 可见比例常数 $A = k$, 所以

$$S = k \ln W \quad (9-21)$$

k 为玻耳兹曼常量, W 是微观状态的数目, 即宏观态出现的概率.

式(9-21)常被称为玻耳兹曼熵关系式. 这个关系式的重要意义在于, 它把宏观量 S (熵) 与微观量 (热力学概率 W) 联系起来, 并对熵给予了统计解释.

若一个孤立系统的热力学概率由 W_1 变至 W_2 , 且 $W_2 > W_1$, 那么, 由式(9.21)可得

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{W_2}{W_1} > 0$$

此式表明, 孤立系统熵增加的过程就是热力学概率增大的过程, 是微观状态数增多的过程, 是系统无序度增大的过程, 是系统从非平衡态趋于平衡态的过程, 是一个宏观的不可逆过程.

四、克劳修斯熵与玻耳兹曼熵的统一

按照(9-5)式定义的熵称为克劳修斯熵, 由(9-21)式定义的熵称为玻耳兹曼熵. 前面已经指出, 克劳修斯熵服从熵增加原理, 它表明了孤立系统中自发过程进行的方向. 玻耳兹曼熵也服从熵增加原理, 其本质是概率法则在起作用, 即自然界的自发过程总是从宏观热力学概率小的状态向宏观热力学概率大的状态过渡. 那么, 克劳修斯熵与玻耳兹曼熵是否一回事呢? 我们不作两个熵等价性的普遍推导, 只以理想气体的自由膨胀为例证明它们所给出的结果是一致的.

现在用热力学概率观点分析一下理想气体向真空的自由膨胀过程. 设 ν mol 理想气体从体积 V_1 自由膨胀到体积 V_2 , 由于它的温度没有变化, 所以每一个分子的速度分布概率不变. 这时影响微观状态数的只是分子的位置分布.

假若我们将气体分子运动的空间分成为许多体积相等的小格子, 每个小格子的

体积为 τ . 那么体积为 V 的空间里就有 V/τ 个小格子. 分子处在不同位置的小格子里, 分子的微观状态是不同的. 因此, 分子在体积 V 中共有 V/τ 个微观态. 每一个分子在体积 V 中都有 V/τ 个微观态. 于是, 我们可以说, N 个分子同时处在体积为 V 的 V/τ 个格子中, 共有 $(V/\tau)^N$ 个微观态. 前面, 曾把系统的微观状态数称为热力学概率. 因此, N 个分子同时处于体积 V 中的热力学概率与体积的 N 次方成正比, 即

$$W \propto V^N$$

在如图 9.1 所示的过程中, 若为 1 mol 理想气体. 打开隔板前, 理想气体的体积为 V_1 , 其热力学概率为

$$W_1 \propto V_1^{N_A}$$

打开隔板后, 气体的体积为 V_2 , 其热力学概率为

$$W_2 \propto V_2^{N_A}$$

两式相除, 有

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{N_A}$$

取对数, 得

$$\ln \frac{W_2}{W_1} = N_A \ln \frac{V_2}{V_1}$$

并对上式两边分别乘以 k , 则得

$$k \ln W_2 - k \ln W_1 = k N_A \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

由玻耳兹曼熵关系式(9-21), 上式可写成

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

因为 $V_2 > V_1$, 所以 $S_2 - S_1 > 0$. 这与克劳修斯熵讨论的结果是一致的. 表明克劳修斯熵与玻耳兹曼熵是统一的.

可见, 无论微观的玻耳兹曼熵还是宏观的克劳修斯熵, 它们都正比于宏观状态的热力学概率的对数, 自然界过程的自发倾向是从概率小的宏观状态向概率大的宏观状态过渡. 那么, 这一切又有什么直观的意义呢? 我们说: 熵高, 或者说宏观态的概率大, 意味着“混乱”、“分散”; 熵低, 或者说宏观态的概率小, 意味着“整齐”、“集中”. 用统计物理的语言说, 前者叫做无序(disorder) 后者叫做有序(order). 例如, 把一碗沙子掺到一碗大米里, 和两种气体相互扩散是一样的, 熵增加了, 这意味着事情被搞

得一塌糊涂,乱糟糟的不可收拾.又如,固态熔化为液态是熵增加的过程,固体的结晶态要比液态整齐有序;液体蒸发为气体是熵增加得更多的过程,气态比液态混乱和分散的多.再如,两种气体化合为一种气体,熵因摩尔数减少了而减少,这意味着集中;反过来,一种气体分解为两种气体,熵因摩尔数增加了而增加,这意味着分散.自由膨胀从集中到分散,功变热从有序到无序,都是熵增加的过程.所以,熵是孤立系统中微观粒子热运动无序程度的量度.

§ 9.5 熵与信息

在物理学中,热力学第二定律和熵是人们公认的比较难懂的概念之一.历史上围绕它们有过不少的争论和诘难,“麦克斯韦妖”就是其中之一.对这些问题的争辩和澄清,大大深化了人们对熵概念的理解,并推广了熵概念,为熵概念进入信息领域铺平了道路.

一、麦克斯韦妖的启示

麦克斯韦设想了一种方式,在外界不给系统输入功的情况下,高温物体可以从低温物体获得热能.如图 9.13 所示,用隔板把容器分成 A 和 B 两部分,隔板上有一带阀门的小孔 C.设想有一个能够观察到单个分子的轨迹和速度的小精灵,此小精灵看守着气体容器内

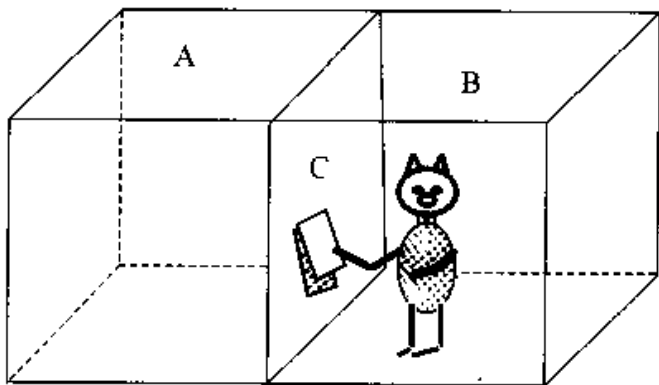


图 9.13 麦克斯韦妖

隔板上小孔的阀门,而且有选择地只让 B 中速度快的分子进入 A,而让 A 中的慢分子进入 B.其结果是 A 中的能量增加,B 中的能量减少;热物体变得更热,冷物体变得更冷.这样,它将在不消耗功的情形下,只用一个观察力极其敏锐的,且能熟练拨开小孔阀门的极其灵敏的精灵,就能将热量从冷物体送到热物体.

由于站在小孔旁边控制阀门的小精灵具有类似孙悟空火眼金睛般的洞察力,被人们称之为“麦克斯韦妖”(Maxwell demon).如果他真如设想者所想象的那样,我们不用燃料就可以让蒸汽机永远运行下去,只要在蒸汽锅炉和冷凝器之间安放一个麦克斯韦妖就行了.

麦克斯韦提出这个机智的论据的用意是要表明热力学第二定律是描述大量分子系统性质的统计性规律,而不是描述系统内单个分子的行为.上述单个快分子从冷物体流向热物体的过程是在分子级别上自发出现的.在不断出现的单个分子的自发涨落中,通过分子的无规则运动,快分子从冷物体运动到热物体,这种随机的涨落并没有违反热力学第二定律,因为热力学第二定律描述的是明显的热流,而不是单个分子的随机涨落.正像麦克斯韦对泰特所说的那样,他的目的是“表明热力学第二定律只具有统计的确定性”.

物理学家经过长期的争论探讨,加深了对信息的认识,明白了信息与熵的联系.麦克斯韦妖的高明妖术在于能使系统的熵减小.要做到这一点,实现准确无误地操作小门,小妖必须取得分子的位置、速度方向、速度大小的详细信息,并能记忆信息.妖精是否能抗拒热力学第二定律,其要害是妖精获取、存贮、处理信息时,是否伴随着有熵的产生.

在麦克斯韦妖操作过程中,这个妖精要能看得见运动的分子,并且能够判断其运动速度,必须另用灯光照在分子上,光将被分子所散射,而被散射的光子为麦克斯韦妖的眼睛所吸收.这一过程涉及到热量从高温热源转移到低温热源的不可逆过程,导致系统中熵的增加.当麦克斯韦妖接收到有关分子运动的信息之后,再通过操作阀门使快、慢分子分离,来减少系统的熵.信息的取得会导致系统中的熵增大,而操作阀门减少的熵,就数量而言,并不能超过前者.因此包括这两个步骤的全过程的总熵还是增加的.有关熵减过程,是由于信息对麦克斯韦妖的作用引起的,故信息应视为系统熵的负项,即信息与负的熵相当.正是由于这个负熵的作用,才使系统的熵减小,但若包括所有的过程,总熵依然是有所增加的.这充分说明,麦克斯韦妖只能而且必须是一个可以从外部引入负熵的开放系统,正因为如此,它并不违背热力学第二定律.

麦克斯韦妖的功勋是使我们把信息和熵联系起来,从而使我们认识了信息的本质.信息与负熵相当,信息的失去为负熵的增加所补偿,因而使系统的熵减少.从麦克斯韦妖可知,若要不做功而使系统熵的减少,就意味着必须获得信息.

二、信息

所谓“信息”,就是对事物状态、存在方式和相互联系进行描述的一组文字、符号、语言、图像等所蕴含的内容.

在日常生活中，“信息”一词被广泛使用着，从人与人之间的谈话、信件往来，乃至报纸新闻、电视广告、天气预报、市场行情，人们总是在不断地获取各种信息。在当今社会里，了解信息，掌握信息，如何充分有效地利用信息，已成为人类赖以生存发展的基本要素。

一切信息都是事物的运动状态和方式及其表述。所以信息来源于物质，又不是物质本身，它从物质的运动中产生出来，又可以脱离信息源而相对独立存在。当然信息离不开物质载体，信息的产生、转换、传送、处理、存储、检测、识别等离不开物质，而且必须要消耗一定的能量，而能量的控制和利用又需要信息，所以信息、物质和能量三者密切相关，不可分割，而又有本质的不同。

信息具有多种多样的载体，这是信息的重要特征。例如，人类通过语言、符号等来传递信息，而生物体内的信息则是通过电化学的变化，经过神经系统来传递。信息的另一个重要特征是，不但不会在使用中消耗掉，而且还可以复制、散布，也就是说它跟物质和能量不同，不会越用越少。比如图书，它可供千万人阅读从而产生不可估量的影响，而信息本身依然存在，毫无损失。

信息不仅有量的不同，而且有质的区别。所谓质的不同指的是，对于不同事物的运动形态及其特征，其潜在的信息不同，它的表述所蕴含的意义不同。也就是说，信息所包含的内容具有质的不同。比如，短短的一首经典的名诗与一本无聊的长篇作品相比，所含信息的价值是无法相比的。

信息是反映观察事物所获得的知识，而知识总是和被观察事件（即信息源）发生的不确定性（即随机性）相联系的。如果被观察事件是确定的，而且是预先知道的，那就无信息可言，但是不确定性不仅与事件发生的所有状态有关，而且还与每个状态的发生有多人的可能性有关。上课点名时，学生答“到”，是解决到与未到这一不确定性的有效信息。学生做练习题时，面对一道习题，对于没有很好掌握知识（信息）的学生来说，会有多个猜测不能确定，不会做就是不确定性无限大。而对于很好地掌握了知识（信息）的学生，会由基本概念和规律出发，正确地解答此习题。

三、信息量

怎样确定信息的量呢？信息往往需要以语言文字或符号系统（如音符、数学公式、图表等）为载体，比较不同载体所传达的信息数量的多寡是很困难的。1948年，现代信息论的创始人香农（C. E. Shannon）摆脱了具体语言和符号系统的限制，撇

开了事件发生的时间、地点、内容、以及人们的情感和人们对事件的反映,而只顾及事件发生的状态数目及每种状态发生的可能性,从概率的角度给出了信息量的定义.

以离散信息源为例,设信源 U 中包括 N 种信号,构成信号集合 $(a_1, a_2, \dots, a_1, \dots, a_N)$. 每个信号发生的概率相等,即 $P = 1/N$. 显然,收到一个信号所获得的信息量只与 N 有关,因为 N 愈大,未收到该信号时的不确定性愈大,而收到后解除了这个不确定性,意味着获得的信息量愈大. 从这个意义上说,欲定量地定义这个信息的信息量,应当选用 N 的某一增函数 $\phi(N)$.

此外,我们希望这种定量规定的信息量有可加性. 例如,收到一个信号获得 $\phi(N)$ 的信息量,再收到一个信号,获得信息量 $\phi(M)$,收到这两个信号后获得的总信息量应为两者之和,即 $\phi(N) + \phi(M)$. 而对应的概率应等于前面两个事件概率之积,要满足这一要求最好的方法就是用对数来定义. 所以,对于一个有 N 个等概率值的信号,规定其信息量为

$$I = \log N \quad (9-22)$$

这就是信息量的基本定义.

上式中对数的底并没有确定,用不同的底可得到不同的值. 在信息论中,最常用的底是 2,这样计算得到的信息量的单位是 1 比特(bit),即二进制单位.

于是,信息量可定义为

$$I = -\log_2 P = \log_2 N \quad (9-23)$$

信息量也常用自然对数表示

$$I = -K \ln P = K \ln N \quad (9-24)$$

通常的事物常具有多种可能性,最简单的情况是具有两种可能性,比如是与否、黑和白、有和无等. 在计算机科学中普遍采用二进制,数据的每一位非 0 即 1,也是两种可能性,在没有信息的情况下每种可能性的概率相等,其概率都为 $P = 1/2$,这个信号的信息量 $\log_2 2 = 1\text{bit}$,一般认为 1bit 是最基本的信息,常称之为“是否信息”.

现在确定比例系数 K ,由(9-24)式,当 $N = 2$ 时 $I = K \ln 2 = 1\text{bit}$

所以
$$K = \frac{1}{\ln 2} = 1.4427$$

上面所讨论的信息量定义式中,末态是惟一的. 对于末态存在多种状态的情况,假设初态的状态数目为 N_0 ,相应的概率为 P_0 ,末态的状态数目为 N ,相应的概率为 P ,则信息量的定义式(9-24)可推广为

$$I = -K \ln \frac{P_2}{P} = K \ln \frac{N_2}{N} \quad (9-25)$$

例 9-7 某四层的楼房,每层有 12 个房间,编号为 101, … 112; 201, … 212; 301, … 312; 401, … 412. 试问(1)“办公室在 305 号房间”;(2)“办公室在 2 层”;(3)“办公室在第 10 间”的信息量各为多少?

解 (1) 因为该楼共有 48 个房间,始态数目 $N_0 = 48$,指定其中一间的状态数 $N = 1$,由(9-25)式,“办公室在 305 号房间”的信息量为

$$\begin{aligned} I_1 &= K \ln \frac{N_0}{N} = K(\ln N_0 - \ln N) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \ln 48 = 5.586 \text{ bit} \end{aligned}$$

(2) 因为每层有 12 个房间,指定 4 层中某一层的状态数 $N = 12$,故“办公室在 2 层”的信息量为

$$\begin{aligned} I_2 &= K(\ln N_0 - \ln N) = \frac{1}{\ln 2} (\ln 48 - \ln 12) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \ln 4 = 2 \text{ bit} \end{aligned}$$

(3) 因为该楼房有 4 层,“办公室在第 10 间”的状态数 $N = 4$,其信息量为

$$\begin{aligned} I_3 &= K(\ln N_0 - \ln N) = \frac{1}{\ln 2} (\ln 48 - \ln 4) \\ &= 3.58 \text{ bit} \end{aligned}$$

所以有

$$I_1 = I_2 + I_3$$

上式表明,前一信息的信息量是后两个信息的信息量之和,前一信息所示事件出现的概率等于后两个事件出现的概率之积.

例 9-8 掷一个骰子后,给出的信息是:“为偶数,但不是 4”,其信息量为多少?

解 一个骰子有 6 个面,即始态总的可能结果 $N_1 = 6$,每种数字出现的概率 $P_1 = 1/6$,收到该信息“结果是偶数”后,可能结果 $N_2 = 3$,每个偶数数字出现的概率为 $P_2 = 1/3$,由(9-25)式得该信息的信息量为

$$I = K \ln \frac{P_2}{P_1} = K \ln \frac{1/3}{1/6} = K \ln 2$$

若第二个信息:“结果不是 4”,收到该信息“结果不是 4”后的可能结果 $N'_2 = 2$,每个

可能结果出现的概率 $P'_2 = 1/2$, 则第二个信息的信息量为

$$I' = K \ln \frac{P'_2}{P_2} = K \ln \frac{1/2}{1/3} = K \ln \frac{3}{2}$$

两条信息的总信息量为

$$I_0 = K \ln \frac{P'_2}{P_2} = K \ln \frac{1/2}{1/6} = K \ln 3 = I + I'$$

可见信息量具有可加性.

当信号不是等概率出现时, (9-24) 式的定义就不适用了. 若信号 a_i 发生的概率为 P_i , 考虑到在等概率时 $P_i = 1/N$, 即 $N = 1/P_i$, 则与信号 a_i 相联系的信息量为

$$I(a_i) = K \ln \frac{1}{P_i} = -K \ln P_i \quad (9-26)$$

此式表明, 信息 a_i 出现的概率愈小, 该信号一旦出现所获得的信息量就愈大.

四、信息熵

信号 a_i 是一个随机量, a_i 出现的信息量 $I(a_i)$ 是 a_i 的函数, 必然也是一个随机量. $I(a_i)$ 常称为 a_i 的自信息, 它具有随机变量的性质. 自信息不能作为信源总体的信息量. 若要问具有一定概率分布的信源 U 中每个信号的平均信息量有多大, 则可对信息按概率作统计平均, 即有

$$S = K \sum_i P_i \ln \frac{1}{P_i} = -K \sum_i P_i \ln P_i \quad (9-27)$$

在信息论中, S 被称为信源的信息熵, 简称信息熵.

当信号是等概率出现时, 即所有的 $P_i = 1/N$, 则信源的信息熵为

$$S = -K \ln P = K \ln N \quad (9-28)$$

例 9-9 运用信息熵公式讨论天气预报问题.

令 $i=1$ 代表下雨情况, $i=2$ 代表不下雨情况. 假设预报员所作的某两次天气预报为: (1) 明天下雨的概率为 80%, (2) 明天下雨的概率为 90%, 试求每次预报的信息熵及信息量.

解 (1) 下雨的概率为 $P_1 = 0.80$, 不下雨的概率为 $P_2 = 0.20$. 由 (9-27) 式, 可得信息熵为

$$\begin{aligned} S &= -K(P_1 \ln P_1 + P_2 \ln P_2) \\ &= -\frac{1}{\ln 2} (0.8 \times \ln 0.8 + 0.2 \times \ln 0.2) \end{aligned}$$

$$= 0.722\text{bit}$$

即此次预报比全部所需信息(1bit)还少 0.722bit

所以,预报员的话(信息)所含信息量只有

$$I = 1 - S = 1 - 0.722 = 0.278\text{bit}$$

(2) 下雨的概率为 $P_1 = 0.90$, 不下雨的概率为 $P_2 = 0.10$. 由(9-27)式, 可得信息熵为

$$\begin{aligned} S &= -K(P_1 \ln P_1 + P_2 \ln P_2) \\ &= -\frac{1}{\ln 2}(0.9 \times \ln 0.9 + 0.1 \times \ln 0.1) \\ &= 0.469\text{bit} \end{aligned}$$

所以,预报员的话所含信息量为

$$I = 1 - S = 1 - 0.469 = 0.531\text{bit}$$

由此例可见,信息熵 S 的减少意味着信息量 I 的增加. 在这一过程中

$$\Delta I = -\Delta S \quad (9-29)$$

此式指出了信息熵与信息的联系——信息的信息量是信息熵的减少量, 即信息量相当于负熵.

比较信息熵公式 $S = K \ln N$ 与玻耳兹曼的熵公式 $S = k \ln W$, 可以看出二者极为相似. 只是比例系数和单位不同.

在玻耳兹曼熵公式中, 比例系数为 $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, 熵的单位为 $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; 在信息熵公式中, 比例系数为 $K = 1/\ln 2$, 熵的单位为 bit. 两者相比, 有

$$1\text{bit} = k \ln 2 \text{J} / \text{K} = 0.957 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (9-30)$$

这个换算关系有什么物理意义呢?(9-30)式表明, 获得 1bit 的信息量相当于减少 $k \ln 2 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 的信息熵. 按照热力学第二定律, 环境必须有一个熵的增加作为补偿. 对于一个孤立系统, 在保持总熵不变的条件下, 想获取信息是不可能的. 获取 1bit 的信息至少要有 $k \ln 2 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 热熵的增加来补偿信息熵的减少, 相对应有 $k \ln 2 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 的功转变为热. 要使计算机里的信息量存储增加一个比特(bit), 它的信息熵减少 $k \ln 2 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, 这只能以环境的熵至少增加同样多为代价. 在温度 T 下处理每个比特的信息, 计算机至少消耗能量 $kT \ln 2$ 焦耳. 这是能耗的理论下限, 实际上当代最先进的微电子元件, 每比特的能耗也在 $10^6 kT$ 的数量级以上.

五、信息熵与遗传密码

早在 1943 年, 著名物理学家薛定谔在柏林所作的题为“生命是什么?”这一产生

深远影响的演讲中,首次提出了生命“依赖负熵为生”的观点,又提出了“以非周期晶体作为遗传密码”的大胆设想.他所说的这种“非周期性晶体”,就是存在于细胞核染色体中的DNA分子.1953年,沃森(J. D. Watson)和克里克(F. H. C. Crick)共同发现了DNA分子的双螺旋结构,它由两股互补的逆平行分子链组成.这一发现引起了分子生物学的重大突破,1977年发明了DNA测序技术,从1987年开始的人类信息谱工作已在近期完成.

计算机程序可以拷贝,遗传密码也需要复制.生物特征的遗传,在分子水平上就是通过DNA复制来实现的.而复制信息的能量消耗是非常低的,据估计,复制1 bit的信息,其能量消耗仅为 $100kT$ 的量级,约为当代最先进的微电子元件的百万分之一.

生物大多数的遗传性状都要通过各种蛋白质表现出来.蛋白质的种类繁多,单就人体内有的就不下10万种,但它们都由20种氨基酸组成,只是排列结构不同.决定一种氨基酸至少需要的信息量为 $I = \log_2 20 = 4.322\text{bit}$.DNA含有的遗传信息指挥着蛋白质合成时的氨基酸顺序,这密码中的一个字符只包含 $\log_2 4 = 2\text{bit}$ 的信息,显然不足以决定一种氨基酸,三个字符包含的信息 $\log_2 4^3 = 6\text{bit}$ 就有多余了.20世纪50年代,物理学家伽莫夫(G. Gamov,大爆炸宇宙论的创始人)用信息论的方法推测,20种氨基酸取决于核苷酸三联密码,20世纪60年代三联密码逐一被破译.

通过DNA复制实现了生物特征的遗传,在遗传编码复制蛋白质分子的过程中,熵大大的减少了,因为信息与负熵相当,负熵的增加补偿了信息的遗失.使人感兴趣的是,生物学的程序常常出现在概率甚低的物理状态,这种物理状态是被一些和麦克斯韦妖相似的酶所建立并且保持的,像麦克斯韦妖维持温度差和压力差一样,酶维持着系统中的化学差别.这一过程也显示出麦克斯韦妖的踪迹:生气勃勃、尺寸微小且具备智能.这一“妖精”不仅在物理世界里大显神通,在生物世界中更是如鱼得水.

思考题

9-1 试说明:如果下述过程是可逆过程,将违背热力学第二定律.

- (1) 一物体从距地面高为 h 处落下,并静止在地面上;
- (2) 一行驶的汽车在制动器的作用下快速停止下来;
- (3) 把一热的物体放在冷水中,最后系统达到温度平衡.

9-2 试根据热力学第二定律判断下列两种说法是否正确?

(1) 功可以全部转化为热,但热不能全部转化为功;

(2) 热量能够从高温物体传到低温物体,但不能从低温物体传到高温物体.

9-3 瓶子里装一些水,然后密闭起来.忽然表面的一些水温升高而蒸发成汽,余下的水温度变低,这件事可能吗?它违反热力学第一定律吗?它违反热力学第二定律吗?

9-4 关于可逆过程和不可逆过程,以下几种说法是否正确?

(1) 可逆过程一定是准静态过程;

(2) 准静态过程一定是可逆过程;

(3) 对不可逆过程,一定找不到另一过程使系统和外界同时复原;

(4) 非静态过程一定是不可逆过程.

9-5 下列过程是可逆过程还是不可逆过程?说明理由.

(1) 恒温加热使水蒸发.

(2) 由外界做功使水在恒温下蒸发.

(3) 在体积不变的情况下,用温度为 T_2 的炉子加热容器中的空气,使它的温度由 T_1 升到 T_2 .

9-6 一绝热容器被隔板分成相等的两部分,一部分为真空,另一部分装有理想气体.若把隔板抽出,气体将进行自由膨胀,系统由非平衡趋于平衡,在此过程中:

(1) 温度如何变化?

(2) 熵如何变化?

9-7 一定量气体经历绝热自由膨胀.既然是绝热的,即 $dQ = 0$,那么熵变也应该为零.对吗?为什么?

9-8 在日常生活中,经常遇到一些单方向的过程,如:

(1) 餐桌上的热餐变凉;

(2) 无支持的物体自由下落;

(3) 木头或其他燃料的燃烧.它们是否都与热力学第二定律有关?在这些过程中熵变是否存在?如果存在,是增大还是减小?

9-9 一定量的气体,初始压强为 p_1 ,体积为 V_1 ,今把它压缩到 $\frac{V_1}{2}$,一种方法是等温压缩,另一种方法是绝热压缩.问哪种方法最后的压强较大?这两种方法中气体的熵改变吗?

9-10 一杯热水放在空气中,它总是冷却到与周围环境相同的温度,因为处于

比周围温度高或低的概率都比较小,而与周围温度的平衡却是最概然状态,但是这杯水的熵却是减小了,这与熵增加原理有无矛盾?

9-11 在滴水成冰的冬天,将一杯水放在室外,水将凝结成冰,此时水的熵是增加还是减少?这与熵增加原理相矛盾吗?

9-12 根据熵增加原理说明:

(1) 0°C 的冰自发地溶解成 0°C 的水;

(2) 0°C 的水自发地凝结成 0°C 的冰;为什么这两个过程都是不可逆过程?

9-13 在体积为 V 的容器中均匀分布着 N 个理想气体分子,设想这些分子自动地集中到容器的一边(如 $V/2$),你能估计出现这种情况的概率吗?

9-14 在图 9.12 中,若容器中共有 3 个气体分子,3 个分子全部处于 A 室的概率为多少?对应宏观态最大的微观态数目为多少?结合书上 4 个分子的分析,应用类推法说明大量气体分子什么宏观态所对应的微观态最多?

9-15 什么是信息?信息量是怎样定义的?信息与熵有何关系?

9-16 熵的负值($-S$)被定义为负熵.有人说:“人们在地球上的日常活动中并没有消耗能量,而是不断地消耗负熵.”他的话对吗?

9-17 试以热运动的特点及规律,说明以下概念的辩证关系:

- (1) 宏观与微观;
- (2) 偶然与必然;
- (3) 平衡与非平衡;
- (4) 有序与无序;
- (5) 可逆与不可逆.

习 题

9-1 质量为 $m = 1\text{ kg}$ 、温度为 0°C 的冰,在 0°C 时完全熔化成水.已知冰的溶解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5\text{ J/kg}$,试求:冰经过熔化过程的熵变.

9-2 把质量为 $m = 1\text{ kg}$ 、温度为 20°C 的水,放在 100°C 的恒温炉子上加热,最后达到 100°C .水的比热容 $c = 4.18 \times 10^3\text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$,分别求水和炉子的熵变.

9-3 在 $1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 压强下, 1 mol 铜的温度由 300 K 升高到 1200 K ,试计算其熵变.已知在此温度范围内铜的定压摩尔热容为 $C_{p,m} = a + bT$,其中 $a = 2.3 \times$

$10^4 \text{ J} \cdot (\text{mol} \cdot \text{K}), b = 5.92 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K}^2)$.

9-4 在冬季的某一日,设室内温度为 20°C ,室外温度为 -7°C ,一座房子散热的速率为 $2 \times 10^8 \text{ J} / \text{h}$. 在 1 s 内这一散热过程的熵变为多少?

9-5 一个人一天大约向周围环境散发 $8 \times 10^6 \text{ J}$ 热量,试估算一个人一天产生多少熵?忽略人进食时带进体内的熵,设人体温度为 $t_1 = 36^\circ\text{C}$,环境的温度按 17°C 计算.

9-6 一辆汽车匀速开行时,消耗在各种摩擦上的功率是 $P = 20 \text{ kW}$. 求由于这个原因在 10 s 内产生熵是多少?设气温为 12°C .

9-7 在一个大气压下,质量为 $m = 0.03 \text{ kg}$ 、温度为 -40°C 的冰与温度为 100°C 的恒温热源接触,变为 100°C 的蒸汽. 试求:(1)各个过程的熵变;(2)整个过程的总熵变.(已知冰的比热容 $c_1 = 2.1 \times 10^3 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$,水的比热容 $c_2 = 4.2 \times 10^3 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$,在气压为 $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下,冰的熔解热 $\lambda = 3.34 \times 10^5 \text{ J} / \text{kg}$,水的汽化热 $L = 2.26 \times 10^6 \text{ J} / \text{kg}$).

9-8 一个金属筒内放有 2.5 kg 水和 0.7 kg 冰,温度为 0°C 而处于平衡态.

(1) 今将金属筒置于比 0°C 稍有不同的房间内使筒内达到水和冰质量相等的平衡态. 求在此过程中冰水混合物的熵变以及它和房间的整个熵变各是多少.

(2) 现将筒放到温度为 100°C 的恒温箱内使筒内的冰水混合物状态复原. 求此过程中冰水混合物的熵变以及它和恒温箱的整个熵变各是多少.

9-9 在一绝热容器中,使温度为 T_1 的 $\nu \text{ mol}$ 理想气体,体积由 V_1 自由膨胀到 V_2 ,然后再用活塞压回到 V_1 . 分别求在以下两种情况下,整个过程的熵变:

(1) 无限缓慢压缩到 V_1 ;

(2) 很快压缩到 V_1, T'_1 .

9-10 $\nu \text{ mol}$ 理想气体 ($\gamma = 1.4$) 的状态变化如图 9.14 所示,其中 1-3 为等温线,1-4 为绝热线. 试分别由下列三种过程:

(1) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$;

(2) $1 \rightarrow 3$;

(3) $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$.

计算气体的熵的变化 $\Delta S = S_2 - S_1$.

9-11 $\nu \text{ mol}$ 理想气体的状态变化如图

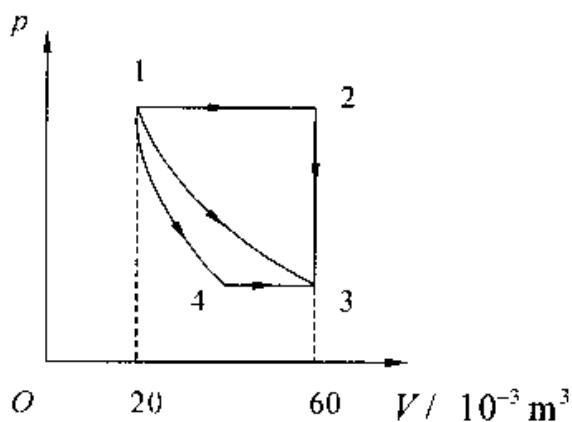


图 9.14

9.15 所示,其中 1—2 为等温线.试分别由下列两种过程

(1) $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$;

(2) $1 \rightarrow 2$;

计算理想气体的熵的变化 $\Delta S = S_2 - S_1$.

9-12 在绝热容器中,有两部分同种液体在等压下混合,这两部分液体的质量相等,都等于 m ,但初始温度不同,分别为 T_1 和 T_2 ,且 $T_1 < T_2$,二者混合后达到新的平衡态.求这一混合引起的系统的总熵的变化,并证明熵是增加了.已知定压比热容 c_p 为常数.

9-13 在与外界绝热并保持压强不变的情况下,将一块金属(质量为 m ,定压比热容为 c_p ,温度为 T_1) 浸入液体(质量为 m' ,定压比热容为 c'_p ,温度为 T'_1) 中.试证明系统达到平衡时,二者的温度相同.

(提示:可以根据能量守恒及使熵的变化为最大值求出.)

9-14 两个完全一样的物体,初始温度分别为 T_1 和 T_2 ,且 $T_1 > T_2$.一台热机工作于这两个不同温度的物体之间,热机从高温物体吸取热量使其温度下降,热机放出热量给低温物体使其温度升高,最终使两物体温度都变为 T' ,热机停止工作.假设两物体吸热、放热都是在等压下进行的,且定压摩尔热容量 $C_{p,m}$ 为常数.

(1) 试求热机对外所做的总功;

(2) 利用熵增加原理证明热机对外所做的功 A 满足:

$$A \leq \nu C_{p,m} (T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2})$$

9-15 掷一个骰子后,分别给出下列信息:

(1) 是奇数,但不是 3

(2) 不是 4

(3) 就是 5

其信息量各为多少?

9-16 计算机处理 1.40 Mb 信息,折合为热力学熵的单位(J/K) 为多少?

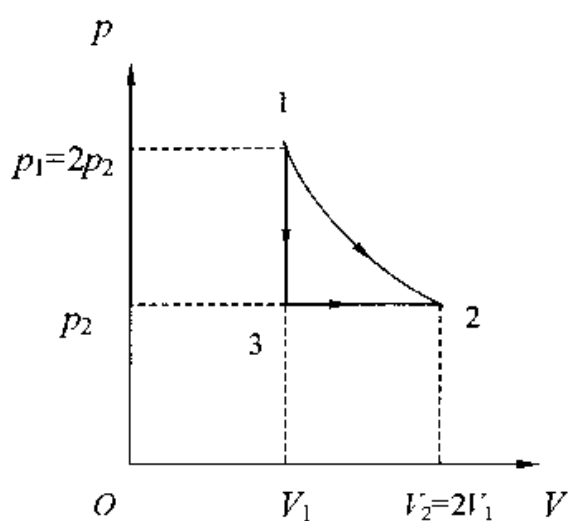


图 9.15

附录 1 矢量

一、标量和矢量

在物理学中,物理学范围内,经常遇到两类物理量,一类是标量物理量(简称标量),如质量、时间、体积等,它们仅有大小和单位并遵循通常的代数运算法则;另一类是矢量物理量(简称矢量)如位移、速度、力等,它们不仅有大小和单位,还有方向,它们遵循矢量代数运算法则。

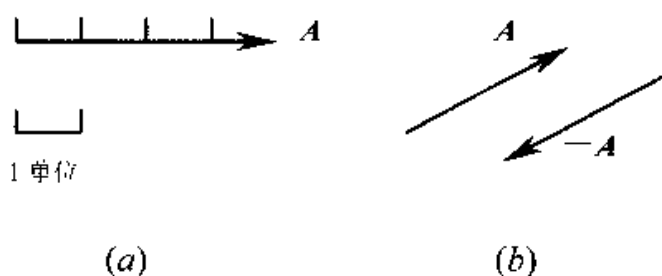


图 1 矢量的图示

矢量通常用黑体字母 A 或上方带有箭头“ \rightarrow ”的字母 \vec{A} 来表示,在作图时,常用有向线段表示,如图 1(a).线段的长短按一定比例表示矢量的大小,箭头的指向表示矢量的方向.如果有一矢量和另一矢量 A 大小相等而方向相反,这一矢量就称为 A 矢量的负矢量,用 $-A$ 来表示,如图 1(b).

将一矢量平移后,它的大小和方向都保持不变.这样,在考察矢量之间的关系或对它们进行运算时,往往根据需要将矢量进行平移,如图 2 所示.

二、矢量的模和单位矢量

矢量的大小称为矢量的模.矢量 A 的模常用符号 $|A|$ 或 A 表示.

如果矢量 e_A 的模等于 1,且方向与矢量 A 相同,则 e_A 称为矢量 A 方向上的单位矢量.引进了单位矢量以后,矢量 A 可以表示为

$$A = |A|e_A$$

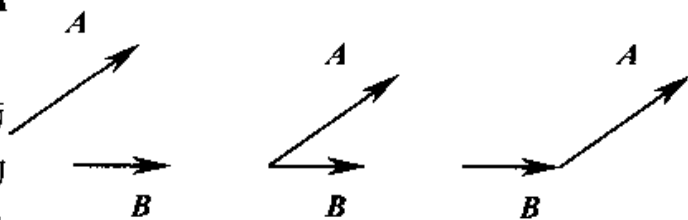


图 2 矢量的平移

这种表示方法实际上是把矢量 A 的大小和方向这两个特征分别地表示出来。

对于空间直角坐标系 (xyz) 来说,通常用 i, j, k 分别表示沿 x, y, z 三个坐标轴正方向的单位矢量。

三、矢量的加法和减法

1. 矢量的加法

设有两个矢量 A 和 B ,如图 3 所示.将它们相加时,可将两矢量的起点交于一点,再以这两个矢量 A 和 B 为邻边作平行四边形,从两矢量的交点作平行四边形的角线,此对角线即代表 A 和 B 两矢量之和,用矢量式表示为

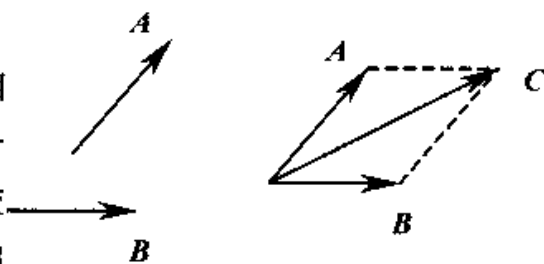


图 3 矢量的加法

$$C = A + B$$

C 称为合矢量,而 A 和 B 则称为 C 矢量的分矢量。

因为平行四边形的对边平行且相等,所以两矢量合成的平行四边形法则可简化为三角形法则:即以矢量 A 的末端为起点,作矢量 B (图 4),则不难看出,由 A 的起点画到 B 的末端的矢量就是合矢量 C 。同样,如以矢量 B 的末端为起点,作矢量 A ,由 B 的起点画到 A 的末端的矢量也就是合矢量 C 。

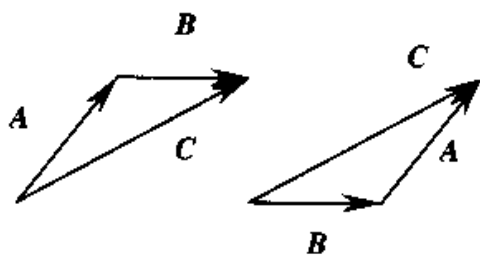


图 4 矢量合成的三角形法则

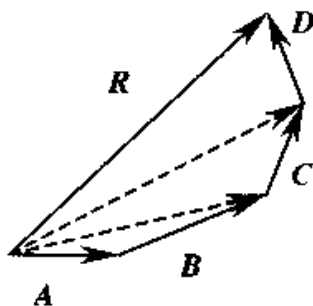


图 5 多矢量的合成

对于多个矢量相加,例如求 A, B, C 和 D 的合矢量,则可根据三角形法则,先求出其中两个矢量的合矢量,然后将该合矢量与第三个矢量相加,求出这三个矢量的合矢量,依次类推,就可以求出多个矢量的合矢量(图 5)。从图中还可以看出,把所有相加的矢量首尾相连,然后由第一个矢量的起点到最后一个矢量的末端作一矢量,这个矢量就是它们的合矢量。由于所有的分矢量与合矢量在矢量图上围成一个多边形,所以这种求合矢量的方法称为多边形法则。

合矢量的大小和方向,除以上的几何法外,也可以通过计算求得。如图 6 中,矢

量 A, B 之间的夹角为 θ , 由图可知, 合矢量 C 的大小

$$C = \sqrt{(A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

方向
$$\varphi = \arctan \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

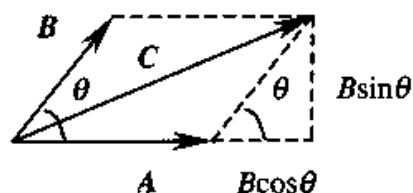


图6 二矢量合成的计算

2. 矢量的减法

矢量的减法是按矢量加法的逆运算来定义的. 矢量 A 和 B 的差是一个矢量, 用 $A - B$ 表示

$$A - B = A + (-B)$$

所以, 求矢量的差 $A - B$, 可按图 7 中所示的三角形法或平行四边形法进行.

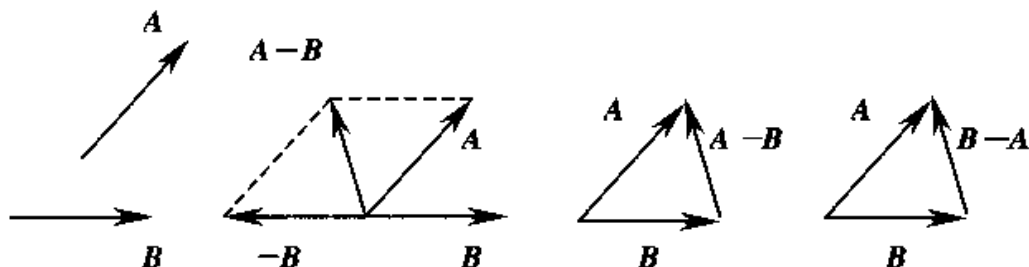


图7 矢量的减法

四、矢量合成的解析法

两个或两个以上的矢量可以合成为一个矢量, 同样, 一个矢量也可以分解为两个或两个以上的分矢量. 但是, 一个矢量分解为两个分矢量时, 则有无限多组解答. 如果先限定了两个分矢量的方向, 则解答是惟一的. 我们常将一矢量沿直角坐标轴分解. 由图 8 可见, 矢量 A 沿 x 轴和 y 轴方向分解是

$$A = A_x i + A_y j$$

其中 $A_x = A\cos\theta, A_y = A\sin\theta$
分别是 A 在 x 轴和 y 轴上的分量. 显然, 矢量 A 的模为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

矢量 A 的方向可用与 x 轴的夹角 θ 来表示, 即 $\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$

在三维直角坐标系 $(oxyz)$ 中, 如图 9 所示, 任一矢量 A 都可沿坐标轴方向分解

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

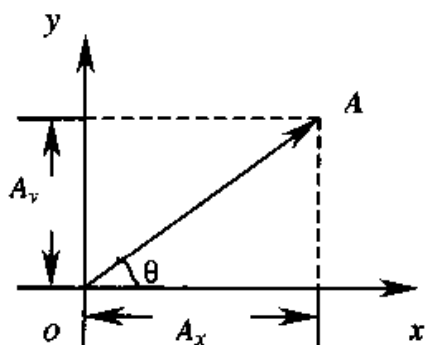


图8 矢量的正交分解

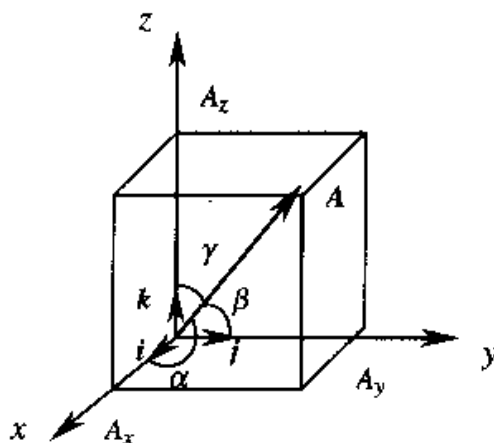


图9 矢量的坐标表示

其中 A_x, A_y, A_z 为矢量 A 在坐标轴上的分量, 上式即为矢量的坐标表示. 于是矢量 A 的模为

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

而矢量 A 的方向则由这矢量与坐标轴的夹角 α, β, γ 来确定:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|A|}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{|A|}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|A|}$$

运用矢量的坐标表示式可以使矢量的加减运算得到简化. 设 A 和 B 两矢量的坐标表达式为

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

如图 10 所示,

$$A \pm B = (A_x \pm B_x) i + (A_y \pm B_y) j + (A_z \pm B_z) k$$

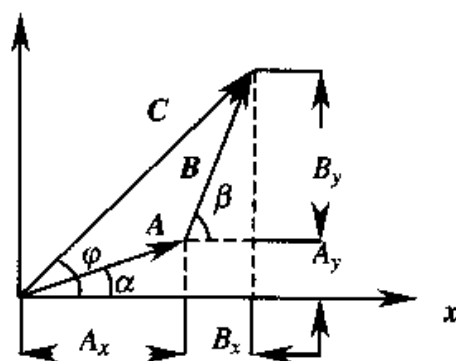


图10 矢量合成的解析法

五、矢量的乘积

1. 矢量的数乘

一个数 m 和矢量 A 相乘, 得到另一个矢量 mA , 其大小是 mA , 如果 $m > 0$, 其方向与 A 相同; 如果 $m < 0$, 其方向与 A 相反.

2. 矢量的标积

在物理学中, 常常遇到两个矢量相乘的情形. 两矢量相乘得到一个标量的叫标积(或称点乘); 两矢量相乘得到一个矢量的叫做矢积(或称叉乘).

设 A, B 为任意两个矢量, 它们的夹角为 θ , 则它们的标积通常用 $A \cdot B$ 来表示, 定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta$$

此式表明:标积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 等于矢量 \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 矢量方向上的投影 $A \cos\theta$ 与矢量 \mathbf{B} 的模的乘积[图 11(a)],也等于矢量 \mathbf{B} 在 \mathbf{A} 矢量方向上的投影 $B \cos\theta$ 与矢量 \mathbf{A} 的模的乘积[图 11(b)].

根据标积的定义,可以得出下列结论:

(1) 当 $\theta = 0$, 即 \mathbf{A}, \mathbf{B} 两矢量平行时, $\cos\theta = 1$, 所以 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. 当 A 和 B 相等时, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2$.

(2) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 \mathbf{A}, \mathbf{B} 两矢量垂直时, $\cos\theta = 0$, 所以 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

(3) 在直角坐标系中, 单位矢量 i, j, k 具有正交性, 即

$$\begin{aligned} i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ i \cdot j &= j \cdot k = k \cdot i = 0 \end{aligned}$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} 两矢量求标积有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

从标积的定义可以得到标积的如下性质:

(1) 标积遵守交换律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\alpha = BA \cos\alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(2) 标积遵守分配律, 即

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

3. 矢量的矢积

设矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之间小于 180° 的夹角为 α , \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的矢积用符号 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 表示, 并定义它为另一矢量 \mathbf{C} , 即

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

矢量 \mathbf{C} 的大小为 $c = AB \sin\alpha$.

矢量 \mathbf{C} 的方向垂直于 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 所在的平面, 其指向可用右手螺旋法则确定. 如图 12 所示, 当右手四指从 \mathbf{A} 经小于 180° 的角转向 \mathbf{B} 时, 右手拇指的指向(即右螺旋前进的方向)就是 \mathbf{C} 的方向. 如果以 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 构成平行四边形的邻边, 则 \mathbf{C} 是这样的一个矢

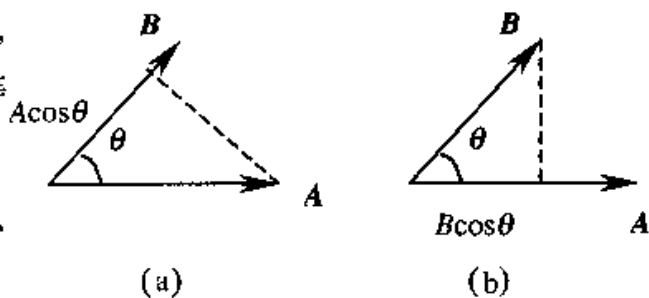


图 11 矢量的标积

量,它垂直于四边形所在的平面,且其指向代表着此平面的正法线方向;而它的大小则等于平行四边形的面积.

利用矢积的定义,可以得到矢积具有如下性质:

(1) 由于 $A \times B$ 的大小 $AB \sin \alpha$ 与 $B \times A$ 的大小 $BA \sin \alpha$ 相同,但 $A \times B$ 和 $B \times A$ 的方向相反,所以

$$A \times B = -B \times A$$

即矢量的矢积不遵守交换定律.

(2) 如果矢量 A 和 B 是平行或反平行,即它们之间的夹角 α 为 0° 或 180° 时,由于 $\sin \alpha = 0$,所以 $B \times A = 0$

(3) 矢积遵守分配律,即

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B$$

(4) 在直角坐标系中,单位矢量之间的矢积为

$$\begin{aligned} i \times i = j \times j = k \times k &= 0 \\ i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j \end{aligned}$$

AB 两矢量求矢积为

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k \end{aligned}$$

利用行列式的表达式,上式可写成

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

4. 三个矢量的混合积

$$(1) A \cdot (B \times C) = A_x (B_y C_z - B_z C_y) + A_y (B_z C_x - B_x C_z) + A_z (B_x C_y - B_y C_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

此式在数值上恰好等于以 A, B, C 三矢量为棱边的六面体的体积.

$$(2) A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

$$= -A \cdot (C \times B) = -B \cdot (A \times C) = -C \cdot (B \times A)$$

$$(3) A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

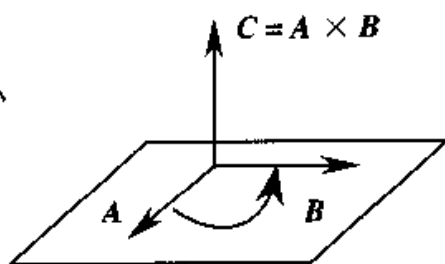


图 12 矢量的矢积

$$(4) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{A}$$

六、矢量函数的导数

在物理上遇见的矢量常常是参量 t (时间) 的函数, 因而写作 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 等等, 这是一元函数的求导. 设在时刻 t , 该矢量为 $\mathbf{A}_1(t)$, 在时刻 $t + \Delta t$, 这矢量为 $\mathbf{A}_2(t + \Delta t)$. 那么在 Δt 时间间隔内, 其增量为

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}_2(t + \Delta t) - \mathbf{A}_1(t)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ 的极限值为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

式中 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 为矢量 \mathbf{A} 对时间 t 的导数.

矢量函数的导数常用其分量函数的导数来表示

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$$

这里注意: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是常矢量, 而 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 是 t 的函数, 现假定这三个函数都是可导的. 则

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}$$

矢量函数的导数的简单公式:

$$(1) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$(2) \text{当 } C \text{ 是常量, 则 } \frac{d}{dt}(C\mathbf{A}) = C \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$(3) \text{当 } f(t) \text{ 是 } t \text{ 的可微函数, 则 } \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{A}(t)] = f(t) \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{df(t)}{dt}\mathbf{A}$$

$$(4) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B}$$

$$(5) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

矢量函数的导数在物理上有很多应用. 例如, 质点运动的瞬时速度和瞬时加速度. 一质点在一曲线上运动, 其位置矢量

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

当质点沿曲线移动时, 其坐标 x, y, z 将是时间 t 的函数

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

此式是质点运动的运动方程. 将上式对时间 t 求导, 得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

而瞬时速度 \mathbf{v} 的时间变化率等于质点的瞬时加速度 \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

七、矢量函数的积分

矢量函数的积分是矢量函数导数的逆问题. 这就是, 当某矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 的导数 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 已知时, 如何求得这个原函数 $\mathbf{A}(t)$. 我们把 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 记作矢量函数 $\mathbf{B}(t)$, 即已知

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{B}(t) = B_x(t)\mathbf{i} + B_y(t)\mathbf{j} + B_z(t)\mathbf{k}$$

这里三个标量函数 $B_x(t), B_y(t), B_z(t)$ 分别代表 $\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt}$. 所以, 将 $\mathbf{B}(t)$ 对时间 t 求积分, 可改变为将 $B_x(t), B_y(t), B_z(t)$ 分别对时间 t 求积分, 即

$$\mathbf{A} = \int \mathbf{B} dt = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

上式中的 A_x, A_y, A_z 分别是下面的三个积分,

$$A_x = \int B_x(t) dt, \quad A_y = \int B_y(t) dt, \quad A_z = \int B_z(t) dt,$$

关于矢量函数的积分, 尤其是当这个函数是空间坐标 x, y, z 的多元函数时, 还有如线积分、面积分、体积分等其他较复杂的积分, 不同的积分计算要按相应的定义式进行. 例如, 功的计算就是对一个矢量函数求线积分的问题. 当力 \mathbf{F} 作用在一个物体上, 力的作用点移动一个微小位移 $d\mathbf{l}$ 时(图 13), 该力 \mathbf{F} 所作的微元功 $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, 所以, 当力的作用点移动一段路程 ab 时, 该力 \mathbf{F} 所作的总功应为

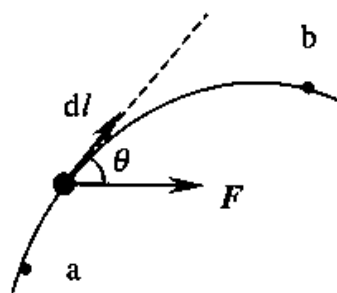


图 13 矢量函数的线积分

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b F \cos\theta dl = \int_a^b F_l dl$$

式中 θ 是力 \mathbf{F} 和位移 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角, F_l 是 \mathbf{F} 沿 $d\mathbf{l}$ 方向的分量. 这种形式的积分叫做 \mathbf{F} 沿曲线 ab 的线积分. 如果这种积分沿着封闭曲线进行(即从 a 点出发仍旧回到 a 点), 则这积分可写为

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

一般地说,对一矢量函数 $\mathbf{B}(x, y, z)$ 沿某一曲线 L (起点 a , 终点 b) 求线积分,可写作 $\int_{L_{ab}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.

由于

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_x dx + B_y dy + B_z dz$$

所以
$$\int_{L_{ab}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_{ab}} B_x dx + \int_{L_{ab}} B_y dy + \int_{L_{ab}} B_z dz$$

即化为计算三个标量函数的积分的总和.

对于力 \mathbf{F} 而言,这样三个积分式 $\int_{L_{ab}} F_x dx$, $\int_{L_{ab}} F_y dy$ 和 $\int_{L_{ab}} F_z dz$ 分别是分力 F_x , F_y , F_z 所作的功.

附录 2 物理学常量

附表 1 基本物理常量

名称	符号	计算用值	1998 最佳值 ①
真空中的光速	c	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$	2.99792458×10^8 (精确)
真空磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ $= 1.26 \times 10^{-6}$	$4\pi \times 10^{-7}$ (精确) $= 1.2566370614 \times 10^{-6}$
真空电容率	ϵ_0	$= 1/\mu_0 c^2$ $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$	$8.854187817 \times 10^{-12}$ (精确)
万有引力常量	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	$6.673(10) \times 10^{-11}$
玻耳兹曼常量	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$	$1.3806503(24) \times 10^{-23}$
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$	$6.02214199(47) \times 10^{23}$
摩尔气体常量	R	$8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$	$8.314472(15)$
普朗克常量	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$6.62606876(52) \times 10^{-34}$
约化普朗克常量	\hbar	$= h/2\pi$ $= 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$1.054571596(82) \times 10^{-34}$
基本电荷	e	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$1.602176462(83) \times 10^{-19}$
电子质量	m_e	$9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$9.10938188(72) \times 10^{-31}$
质子质量	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.67262158(13) \times 10^{-27}$
中子质量	m_n	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.67492715(13) \times 10^{-27}$
磁通量子 $h/2e$	Φ_0	$2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb}$	$2.067833636(81) \times 10^{-15}$
电导量子 $2e^2/h$	G_0	$7.75 \times 10^{-5} \text{ s}$	$7.748091696(28) \times 10^{-5}$
精细结构常量	α	7.3×10^{-3}	$7.297352533(27) \times 10^{-3}$
里德伯常量	R_∞	$1.10 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$	$1.0973731568549(83) \times 10^7$
斯特藩—玻耳兹曼常量	σ	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$	$5.670400(40) \times 10^{-8}$
电子伏	eV	$1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$	$1.602176462(63) \times 10^{-19}$
原子质量单位	u	$1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.66053873(13) \times 10^{-27}$

① 根据国际科技数据委员会(CODATA)1998年的推荐值.(1999年正式发表)

附表 2 有关太阳、地球、月球的常用数据

星体	物理量	计算用值
太阳	质量	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
	半径	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
	平均密度	$1.41 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
	表面重力加速度	274 m/s^2
	自转周期	25d(赤道), 37d(靠近极地)
	绕银河系中心的公转周期	$2.5 \times 10^8 \text{ (a)}$
	总辐射功率	$4 \times 10^{26} \text{ W}$
地球	质量	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
	赤道半径	$6.378 \times 10^6 \text{ m}$
	极半径	$6.357 \times 10^6 \text{ m}$
	平均密度	$5.52 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
	表面重力加速度	9.81 m/s^2
	自转周期	1 恒星日 = $8.616 \times 10^4 \text{ s}$
	对自转轴的转动惯量	$8.05 \times 10^{37} \text{ kg} \times \text{m}^2$
	到太阳的平均距离	$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$
	公转周期	$1a = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$
	公转速率	29.8 m/s
月球	质量	$7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$
	半径	$1.74 \times 10^6 \text{ m}$
	平均密度	$3.34 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
	表面重力加速度	1.62 m/s^2
	自转周期	27.3d
	到地球的平均距离	$3.82 \times 10^8 \text{ m}$
	绕地球运行周期	1 恒星月 = 27.3d

习题答案

第 1 章

1-1 C 1-2 D 1-3 B

1-4 D 1-5 D 1-6 D

1-7 $-g\sin 30^\circ, \frac{v^2}{g\cos 30^\circ}$

1-8 变速曲线运动, 变速直线运动, 匀速曲线运动

1-9 $\sqrt{2px}, ut, \sqrt{2put}, ui + \sqrt{\frac{pu}{2t}}, -\sqrt{\frac{pu}{8t^3}}j$

1-10 80m/s, 2m/s²

1-11 $10\sqrt{2}$ m/s, 东偏北 45°

1-12 (1) 在最初 2s 内的平均速度为 -4(m/s) 2s 末的瞬时速度为 -20(m/s)

(2) 1s 末到 3s 末的位移为 -44(m) 1s 末到 3s 末的平均速度为 -22(m/s)

(3) 1s 末到 3s 末的平均加速度为 $\bar{a}_t = -24(\text{m/s}^2)$ 不能用 $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$ 计算.

(4) 质点 3s 末的瞬时加速度为 -36(m/s²)

1-13 (1) 位置矢量的表达式为 $r = xi + yj = (3t+5)i + (0.5t^2 + 3t+4)j$

(2) 质点的速度为 $v(4) = 3i + (4+3)j = 3i + 7j$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \approx 7.6 \text{ m/s}$$

速度与 x 方向的夹角为 $\alpha = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{7}{3} \approx 66.8^\circ$

1-14 (1) 100m (2) 20m/s

1-15 $a_r = -\frac{h^2}{s^3}(v_0^2), v_t = \frac{\sqrt{h^2 + s^2}}{s}(-v_0)$

1-16 (1) 4136.6(s) \approx 69.4min

(2) $\omega \approx \frac{v}{r} = \frac{1.3}{5.0 \times 10^{-2}} = 26(\text{rad/s})$ $\frac{d\omega}{dt} = -3.31 \times 10^{-3}(\text{rad/s}^2)$

1-17 $v = 4t^2 = 4 \times 1^2 = 4(\text{m/s})$ $a_t = 8t = 8(\text{m/s}^2)$

1-18 (1) $t = \frac{100}{1.5 \sin 15^\circ} \approx 2.6 \times 10^3 (\text{s})$

船到达对岸时,在下游的坐标为 $y = -1.4 \times 10^3 (\text{m})$

(2) $\alpha = 41.4^\circ$

船到达对岸要花的时间为: $t = \frac{100}{1.5 \times \sin 41.4^\circ} \approx 1.0 \times 10^3 (\text{s})$

船到达对岸时,在下游的坐标为 $y = (1.5 \times \cos 41.4^\circ - 2) \times 1.0 \times 10^3 = -875 (\text{m})$

第 2 章

2-1 (略)

2-2 39.5m

2-3 (1) 3.32N, 3.75N; (2) $17.0 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

2-4 $d_1 = v^2 / 2\mu_1 g$; $d_2 = \frac{v_2^2}{\mu_2 g}$; 由于 $d_1 < d_2$ 可知制动安全.

2-5 99.6N

2-6 $8.44 \times 10^3 \text{m}$; $1.49 \times 10^4 \text{m}$

2-7
$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{k v_0 t}{R}}$$

2-8 (1) $v = \frac{R v_0}{R + v_0 \mu t}$; (2) $t' = \frac{R}{\mu v_0}$; $s = \frac{R}{\mu} \ln 2$

2-9 $v = 6 + 4t + 6t^2$; $x = 5 + 6t + 2t^2 + 2t^3$

2-10
$$v = \sqrt{\frac{F_0 L}{m}}$$

2-11 (1) $30.0 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; (2) 467m

2-12 (1) $h = y_{\text{max}} = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g + k v_0^2}{g} \right)$; (2) $v = v_0 \left(1 + \frac{k v_0^2}{g} \right)^{-1/2}$

2-13 $\frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2}$; $-\frac{2m_2 a + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$; $\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$

第 3 章

3-1 (略)

$$3-2 \quad (1) m = 1.8 \times 10^6 \text{ kg}; \quad (2) v = \sqrt{\frac{5}{3}t + 100};$$

$$(3) F = \frac{1.5 \times 10^9}{\sqrt{\frac{5}{3}t + 100}}; \quad (4) s = 2.8 \text{ km}$$

$$3-3 \quad v = \sqrt{\frac{2m^2 gh \cos^2 \alpha}{(M+m)(M+m \sin^2 \alpha)}}$$

$$3-4 \quad 0.16, 240 \text{ J}$$

$$3-5 \quad 1.14 \times 10^5 \text{ N}$$

$$3-6 \quad 3 \text{ J}$$

$$3-7 \quad GMm \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

$$3-8 \quad 49 \text{ J}$$

$$3-9 \quad -mv_0 \sin \alpha j; \quad -2mv_0 \sin \alpha j$$

$$3-10 \quad 882 \text{ J}$$

$$3-11 \quad (1) -\mu_s mgl; \quad (2) -\frac{1}{2}kl^2; \quad (3) 0 \quad (4) -(\mu_s mgl + \frac{1}{2}kl^2)$$

$$3-12 \quad (1) 4.00 \text{ m/s}; \quad (2) 2.50 \text{ m/s}; \quad (3) 4.00 \text{ m/s}$$

$$3-13 \quad \frac{mg}{k} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}} \right]$$

$$3-14 \quad 3.68 \times 10^3 \text{ kg/s}; \quad 2.47 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$3-15 \quad (1) G \frac{m_E m}{6R_E}; \quad (2) -G \frac{m_E m}{3R_E}; \quad (3) -G \frac{m_E m}{6R_E}$$

$$3-16 \quad (\text{略})$$

$$3-17 \quad F = \rho_1 \lambda g + \rho_1 v_0^2$$

$$3-18 \quad v = 2.10 \text{ km/s}$$

$$3-19 \quad \frac{H}{H_0} = \frac{2m_1^2}{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}$$

$$3-20 \quad 5655.7 \text{ m}$$

$$3-21 \quad u = 9.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$3-22 \quad 0.41 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$3-23 \quad mg \left[3 + \frac{2m}{M} \right]$$

$$3-24 \quad k/2r^2$$

$$3-25 \quad (1) -\frac{3}{8}mv_0^2; \quad (2) \frac{3v_0^2}{16\pi r g}; \quad (3) 4/3 \text{ 圈}$$

$$3-26 \quad F \geq (m_1 + m_2)g$$

$$3-27 \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$3-28 \quad \alpha = 1$$

$$3-29 \quad h_1 = 1/9\text{m}; h_2 = 4/9\text{m}$$

第 4 章

$$4-1 \quad (1) 40\pi \cdot \text{s}^{-1} \quad 10 \text{ 圈} \quad (2) 400\pi \cdot \text{s}^{-1}, 80\pi\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, 8\pi\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$4-2 \quad (1) 8.6\text{s}^{-1}; \quad (2) 4.5e^{-\frac{1}{2}}\text{s}^{-2}; \quad (3) 5.87 \text{ 圈}$$

$$4-3 \quad 0.698\text{s}^{-2} \quad 6.28 \times 10^{-2} \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad 4 \times 10^2 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$4-4 \quad 3.14\text{s}^{-2} \quad 78.5\text{s}^{-1}$$

$$4-5 \quad 314\text{N}$$

$$4-6 \quad 10.8\text{s}$$

$$4-7 \quad J = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)$$

$$4-8 \quad \frac{2}{3}mR^2$$

$$4-11 \quad \frac{1}{2}mR^2$$

$$4-12 \quad 7.61\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad 381\text{N} \quad 438\text{N}$$

$$4-13 \quad (1) 2.45\text{m} \quad (2) 39.2\text{N}$$

$$4-14 \quad \frac{1}{6}g \quad \frac{2}{3}ml \quad \frac{5}{6}mg$$

$$4-15 \quad \frac{J_1\omega r_1^2}{J_1r_2^2 + J_2r_1^2}, \quad \frac{J_1\omega_0 r_1 r_2}{J_1r_2^2 + J_2r_1^2}$$

$$4-16 \quad -9.25 \times 10^{-2} \text{s}^{-1}$$

$$4-17 \quad \frac{7Lg}{24v_0} \cos\left(\frac{12v_0}{7L}t\right)$$

$$4-18 \quad (1) 2.0\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ (2) 88^\circ 38'$$

$$4-19 \quad (1) 20.0\text{kg} \cdot \text{m}^2 \quad (2) -1.32 \times 10^4 \text{J}$$

$$4-21 \quad (1) 4\omega_0; \quad (2) \frac{3}{2}m r_0^2 \omega_0^2$$

$$4-22 \quad (1) 0.0125\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}; \quad (2) -0.098\text{N} \cdot \text{m}; \\ (3) 7.84\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}, \text{进动的方向沿逆时针.}$$

第 5 章

5-1 B 5-2 B 5-3 A 5-4 C 5-5 C

5-6 C 5-7 B 5-8 D

5-9 $v = -12\sqrt{3}\pi \times 10^{-2} \text{ m/s}$, $a = -48\pi^2 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$

5-10 $\mu(m+M)g/(k_1+k_2)$

5-11 $x = 4\cos\frac{\pi}{6}t$

5-12 12.96N 或 6.64N, 0.062m

5-13 $T = 2.72\text{s}$, 10.8cm

5-14 (1) $x = 2.4 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$

(2) $t = \frac{1}{6} \text{ s}$

(3) $x = -1.7 \times 10^{-2} \text{ m}$, $v = 0.21 \text{ m/s}$, $a = 2.68 \text{ m/s}^2$

5-15 $x = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t + \varphi)$, $A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kg}{(m+M)g}}$, $\varphi = \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+M)g}}$

5-16 $A = 0.25\text{m}$, $x = \pm 0.18\text{m}$, $E_p = 0.2\text{J}$

第 6 章

6-1 (1) $8.33 \times 10^{-3} \text{ S}$, 0.25m ; (2) $y = 4.0 \times 10^{-4} \cos(240\pi t - 8\pi x)$ (SI) 取波的传播方向与坐标轴方向一致

6-2 (1) 0.2s , 5Hz , $15.7\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 3.14m

6-3 (1) 0.20m , $2.5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 1.25Hz , 2.0m . (2) $1.57\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

6-4 (1) $y = A\cos(100\pi t - \frac{\pi}{2})$ (2) $y = A\cos[100\pi(t - \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}]$ (3) $y_1 = A\cos(100\pi t - 15.5\pi)$, $\phi_{10} = -15.5\pi$, $y_2 = A\cos(100\pi t - 5.5\pi)$, $\phi_{20} = -5.5\pi$ (4) π

6-5 (1) $y = 0.2\cos 2\pi(\frac{t}{0.8} + \frac{x}{2})$ (SI) (4) 0.8

6-6 $y = 0.40\cos[\frac{\pi}{4}(t+x) - \frac{\pi}{2}]$

6-7 $1.27 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^2$

6-8 (1) $1.58 \times 10^5 \text{ W} \cdot \text{m}^2$ (2) 3.79J

6-9 (1) 3π (2) $|A_2 - A_1|$

6-10 取 AB 方向为 x 轴的正方向, 以 A 点为坐标原点, 静止的各点的位置为 $x = 15 - 2k$,
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$

6-12 (1) $y = A \cos[2\pi v(t - \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}]$ (2) $y = A \cos[2\pi v(t + \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}]$ 静止的点的位
 置在 O、P 之间 $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}$

6-13 (1) 865.6 Hz, 743.7 Hz (2) 826.2 Hz

6-14 $19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

第 7 章

7-1 B 7-2 D 7-3 C 7-4 C 7-5 B

7-6 B 7-7 B 7-8 D 7-9 D 7-10 A

7-11 (1) 沿空间各方向运动的分子数相等

(2) $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

7-12 27.8 g/mol

7-13 2.45×10^{25} 个 $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$

7-14 3.01×10^{23} 个

7-15 物质热现象和热运动规律 统计

7-16 2296 m

7-17 (2)

7-18 $\int_{v_p}^{\infty} f(v) dv$

7-19 2

7-20 1

7-21 (1) $P = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$ (2) $T = 362 \text{ K}$

7-22 $\Delta T = 6.42 \text{ K}$ $\Delta P = 6.67 \times 10^{-4} \text{ Pa}$ $\Delta E = 2.00 \times 10^3 \text{ J}$ $\Delta \bar{\epsilon}_k = 1.33 \times 10^{-22} \text{ J}$

7-23 $\frac{E(H_2)}{E(He)} = \frac{5}{3}$

7-24 $\frac{M_1 - M_2}{P_1 - P_2} = \frac{RT}{V}$

7-25 3.21×10^9 个

7-26 (略)

7-27 $0.17 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 5.1×10^{25} 个 $\cdot \text{m}^{-3}$

- 7-28 $3.74 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ $6.23 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ $0.935 \times 10^4 \text{ J}$
 $3.12 \times 10^3 \text{ J}$ $0.195 \times 10^3 \text{ J}$
- 7-29 $454 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $516 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $558 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- 7-30 $3.21 \times 10^{17} \text{ m}^3$ 7.78 m 60 s^{-1}

第 8 章

- 8-1 C 8-2 B 8-3 C 8-4 C 8-5 C
 8-6 D 8-7 D 8-8 D 8-9 B
 8-10 8.31J 29.09J
 8-11 $\frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$
 8-12 否, 2 不同
 8-13 $S_1 + S_2, -S_1$
 8-14 500, 100.
 8-15 (1) $Q_{\text{ad}} = 250 \text{ J}$ (2) 放热, $Q_{\text{ex}} = 292 \text{ J}$ (3) $Q_{\text{in}} = 21 \text{ J}$
 8-16 (1) $5.90 \times 10^3 \text{ J}$ (2) $8.02 \times 10^3 \text{ J}$
 8-17 (1) 由等容升温和等压膨胀两个过程组成 (2) $4.9 \times 10^3 \text{ J}$
 8-18 $Q = -8.43 \text{ J}$ $\Delta E = 124.7 \text{ J}$ $C_m = -8.43 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
 8-20 32.2kJ, 32.2W
 8-21 (1) $Q_{\text{in}} = -6.23 \times 10^3 \text{ J}$ $Q_{\text{ex}} = 3.74 \times 10^3 \text{ J}$ $Q_{\text{in}} = 3.4 \times 10^4 \text{ J}$
 (2) 功 $A = 0.96 \times 10^3 \text{ J}$ (3) $\eta = 13.4\%$
 8-22 (1) $A_{1-2} = \frac{1}{2}RT_1, \Delta E_{1-2} = \frac{5}{2}RT_1, Q_{1-2} = 3RT_1$
 $A_{2-3} = -\Delta E_{2-3} = \frac{5}{2}RT_1$ $Q_{2-3} = 0$
 $A_{3-1} = -2.08RT_1$ $\Delta E_{3-1} = 0, Q_{3-1} = -2.08RT_1$.
 (2) $\eta = 30.2\%$.

第 9 章

- 9-1 $1.22 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
 9-2 $1.01 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}; -9.01 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1};$
 9-3 $3.72 \times 10^4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

9-4 $19.2\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

9-5 $1.7 \times 10^3\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

9-6 $701\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

9-7 (1) $c_1 m \ln \frac{T_2}{T_1}, \lambda m, c_2 m \ln \frac{T_3}{T_2}, \frac{Lm}{T_3}$, (2) $268\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$;

9-8 (1) $-1.10 \times 10^3\text{J} \cdot \text{K}^{-1}, 1.10 \times 10^4\text{J} \cdot \text{K}^{-1}, 0$;

(2) $1.10 \times 10^3\text{J} \cdot \text{K}^{-1}, -0.81 \times 10^4\text{J} \cdot \text{K}^{-1}, 0.29 \times 10^3\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$;

9-9 (1) $\nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$; (2) $\nu C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1}$;

9-10 (1) $\nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = 9.13\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; (2) $9.13\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; (3) $9.13\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$;

9-11 (1) $\Delta S = \nu R \ln 2$; (2) $\Delta S = \nu R \ln 2$

9-12 (略)

9-13 (略)

9-14 (1) $\nu C_{p,m}(T_1 + T_2 - 2T')$; (2) 略

9-15 (1) $K \ln 3$; (2) $K \ln \frac{6}{5}$; (3) $K \ln 6$;

